Ibrahim Aganović
Krešimir Veselić

JEDNADŽBE MATEMATIČKE FIZIKE



ŠKOLSKA KNJIGA — ZAGREB

30850 / 1

Ibrahim Aganović, Krešimir Veselić — JEDNADŽBE MATEMATIČKE FIZIKE

Urednik

ZLATKO ŠPORER

Recenzenti

dr MLADEN ALIĆ
dr BRANKO NAJMAN

Izdavačka radna organizacija ŠKOLSKA KNJIGA Zagreb, Masarykova 28 — Za izdavača dr JOSIP MALIĆ — Grafički urednik JOSIP JELIĆ — Lektor MARIJA SABLJAK — Korektori IVANKA PALEŠĆAK-RADEŠIĆ i ANĐELKA DALBELLO — Tisak završen u siječnju 1985.

Nacionalna i sveučilišna biblioteka, Zagreb
Katalogizacija na izvoru:

517.9 : 53] (075.8)

AGANOVIĆ, Ibrahim
Jednadžbe matematičke fizike / Ibrahim Aganović, Krešimir Veselić. — Zagreb : Školska knjiga, 1985— . — sv. ; 24 cm
Sv. 1. — 1985. — 140 str. : ilustr.

Nakl. 2000 primj.

1. Veselić, Krešimir

Tisak GRAFIČKI ZAVOD HRVATSKE, Zagreb

IBRAHIM AGANOVIĆ
profesor Prirodoslovno-matematičkog
fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

KREŠIMIR VESELIĆ
profesor Univerziteta u Hagenu
(SR Njemačka)

JEDNADŽBE MATEMATIČKE FIZIKE

1. SVEZAK



ŠKOLSKA KNJIGA, ZAGREB 1985

SADRŽAJ

Predgovor 7

Obična diferencijalna jednadžba 9

1. Ravnoteža žice 9
2. Rubni uvjeti 14
3. Postavka rubnog problema 19
4. Princip superpozicije 25
5. Slučaj $b = 0$ 27
6. Slučaj $b \neq 0$ 31
7. Svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije 33
8. Koncentrirano djelovanje 38
9. Greenova funkcija 43
10. Rješenje rubnog problema pomoću Greenove funkcije 48
11. Varijaciona jednadžba 53
12. Funkcional energije 58
13. Varijacioni račun 61
14. Metoda konačnih elemenata 71
15. Ravnoteža štapa 85
16. Rubni problemi za štap 92
17. Greenova funkcija i rješenje rubnog problema za štap 101
18. Varijaciona jednadžba i funkcional energije za štap 107
19. Metoda konačnih elemenata za štap 109
20. Stabilnost štapa 112
21. Nelinearni problemi 119

Dodatak 131

1. Cauchyjev problem za obične diferencijalne jednadžbe 131
2. Linearne jednadžbe. Liouvilleova formula 136

Predgovor

Getrenntes wieder — vereinigen.
R. Courant

Ova je knjiga prva u nizu udžbenika iz primijenjene matematike, koje namjenjujemo studentima kako matematike, tako i tehničkih disciplina.

Razvoj matematike te fizike i tehnike u našem stoljeću doveo je do dalekosežnog razdvajanja tih dvaju dotada usko povezanih područja. Osim općenite i posvuda prisutne težnje za što većom specijalizacijom takvom razvoju uvelike je pogodovao tzv. »apstraktni pristup« koji omogućuje da se matematika organizira na strogo deduktivnom principu, bez pozivanja na ikakav geometrijski, fizikalni ili neki drugi zor. Konsekventna primjena apstraktnog pristupa, a usto i novog »matematičkog jezika« u sveučilišnoj nastavi činila je gotovo nemogućim sporazumijevanje prosječnog matematičara s inženjerom pa i fizičarom. Još je veći raskorak na području istraživačkog rada. Opasnosti, koje u sebi krije ovakav razvoj dobro je uočio R. Courant u predgovoru glasovitom djelu Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik (Springer, Berlin, 1924), već tada propagirajući potrebu ponovne sinteze.

Burni samosvojni i u sebi pozitivni razvoj apstraktne matematike nimalo ne umanjuje potrebu komunikacije između matematičara i stručnjaka u primjenama. Dapače, ta potreba raste iz dana u dan. Namjera autora bila je napisati tekst, koji će moći čitati studenti kako matematike tako i fizike i tehnike i koji će pridonijeti njihovom međusobnom razumijevanju.

Izbor materijala slijedi tradicionalni okvir matematičke fizike. Nastojali smo da budu zastupljena tri osnovna aspekta primijenjene matematike; *formulacija*, *matematičko istraživanje* i *numerička analiza* modela. Od drugih knjiga sličnog sadržaja ova knjiga se znatno razlikuje po zastupljenosti prvog aspekta, pa u tom smislu predstavlja neku vrstu uvoda u *mehaniku kontinuuma*. Drugi aspekt je u velikom dijelu podvrgnut osnovnoj namjeni, ali se idejno približava i suvremenoj teoriji. Posebno označeni dijelovi pisani su strogo; njih čitalac ne-matematičar može ispustiti u prvom čitanju, a neke od njih i posve. Čitajući barem neke od tih dijelova on će uvidjeti nužnost strožeg pristupa u iole delikatnijim pitanjima teorije. S druge strane, matematički orijentiran čitalac će katkada zapeti na ovom ili onom »inženjerski« pisanom mjestu; produži li čitanje naići će na posebno označen tekst, u kojem stoji formulacija s uobičajenom strogosti.

Treći, numerički aspekt ograničen je na *metodu konačnih elemenata*, osnovno sredstvo strukturalne mehanike pa i mehanike fluida.

Osnovu prezentiranog materijala čine *linearni problemi. Nelinearni problemi* tretiraju se uglavnom kao male smetnje linearnih pa se na primjerima ilustrira *metoda sukcesivnih aproksimacija.*

Posebnu ulogu u našem izlaganju imaju *zadaci*; oni čine integralni dio teksta. Naučiti studenta da riješi zadatak, izražen žargonom modela, osnovna je svrha ove knjige.

Matematičko predznanje, koje se traži od čitatelja uključuje osnove diferencijalnog i integralnog računa[1] te linearne algebre (matričnog računa)[2].

U 1. svesku, koji sada predlažemo čitatelju, obrađuju se jednodimenzionalni *ravnotežni modeli*; oni se svode na *rubne probleme za obične diferencijalne jednadžbe*[3]. Činjenice o običnim diferencijalnim jednadžbama, koje koristimo, izložene su u Dodatku.

Kod izrade zadataka u 1. svesku pomogli su nam Ž. Hanjš i M. Rogina, asistenti Matematičkog odjela Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu; Ž. Hanjš je osim toga pomno pregledao cijeli rukopis i dao korisne primjedbe. Tekst je s velikim strpljenjem tipkala B. Grdović, administrator Matematičkog odjela. Svima njima dugujemo veliku zahvalnost.

Zahvaljujemo također kolektivu Školske knjige, posebno uredniku Zlatku Šporeru.

U Zagrebu, siječnja 1984.

I. Aganović
K. Veselić

---

[1] Na primjer Ž. Marković, Uvod u višu analizu I dio, Školska knjiga, Zagreb, 1956; S. Kurepa, Matematička analiza, Funkcije jedne varijable, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

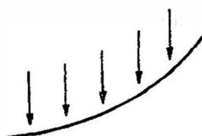
[2] Na primjer S. Kurepa, Uvod u linearnu algebru, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

[3] Od domaćih knjiga o običnim diferencijalnim jednadžbama v. na primjer F. Križanić, Navadne diferencijalne enačbe in varijacijski račun, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1974; V. Marić, M. Skendžić, Obične diferencijalne jednadžbe, Naučna knjiga, Beograd, 1980.

OBIČNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

§ 1. Ravnoteža žice

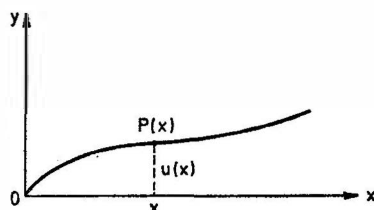
U ovoj glavi proučavat ćemo *ravnotežni položaj* tanke žice na koju djeluje zadana *vanjska sila* (sl. 1). Neka odsječak $[0, l]$ na osi-x predstavlja *nedeformirani položaj* žice. Pod utjecajem vanjske sile žica se *deformira*; pretpostavit ćemo da je vanjska sila *slaba* tako da se žica *malo* deformira, to jest da se njezin deformirani položaj malo razlikuje od segmenta $[0, l]$. Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo također da je vanjska sila paralelna ravnini xy; tada i deformirana žica leži u ravnini xy.



Slika 1.

Pri deformaciji točka na mjestu x nedeformirane žice prijeđe u neki položaj $P(x)$. *Pomak* $\overrightarrow{xP(x)}$ ima *uzdužnu** i *poprečnu* komponentu; *pretpostavit ćemo da se uzdužni pomak može zanemariti.* Poprečni pomak (*progib*) točke x označit ćemo sa $u(x)$. Deformirana žica tada ima jednadžbu (sl. 2)

$$y = u(x). \tag{1}$$



Slika 2.

Derivacija $u'(x)$ je *mjera deformacije* (kraće *deformacija*) na mjestu x. *Pretpostavka da je deformacija mala izražava se uvjetom*

$$|u'(x)| \ll 1 \quad \textit{za svako } x. \tag{2}$$

Iz jednakosti

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

dobivamo

$$|u(x) - u(0)| = \left| \int_0^x u'(\xi)\, d\xi \right| \leq \int_0^x |u'(\xi)|\, d\xi \ll \int_0^x d\xi = x \leq l, \tag{4}$$

ili

$$\frac{|u(x) - u(0)|}{l} \ll 1. \tag{5}$$

---

* Smjer osi x nazivamo *uzdužnim* ili *longitudinalnim*, a smjer osi y *poprečnim* ili *transverzalnim*.

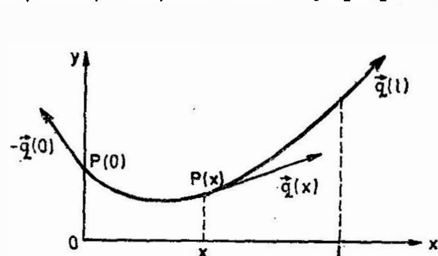
Prema tome, *pri maloj deformaciji relativni progib* $u(x) - u(0)$ *je (po apsolutnoj vrijednosti) malen prema duljini žice.*

Ako se žica pod utjecajem vanjskih sila nalazi u ravnoteži, funkcija u (*ravnotežni progib*) zadovoljava diferencijalnu jednadžbu koju ćemo izvesti prihvaćajući ovaj

Princip ravnoteže sile. *Ako je tijelo u ravnoteži, zbroj svih sila koje djeluju na bilo koji komad (dio) tijela jednak je nuli.*

Da bismo primijenili taj princip, moramo opisati sile koje djeluju na proizvoljni dio deformirane žice. Te sile su *kontaktna* i *linijska.*

Unutrašnja kontaktna sila opisuje djelovanje jednog komada žice na drugi koji mu je susjedan; *ta sila je potpuno određena položajem kontakta* (to jest, *ne ovisi o veličini komada*). *Označimo sa* $\vec{q}(x)$ *silu kojom dio* $\widehat{P(x)P(l)}$ *djeluje na dio* $\widehat{P(0)P(x)}$ (sl. 3); tada *dio* $\widehat{P(0)P(x)}$ *djeluje na dio* $\widehat{P(x)P(l)}$ *silom* $-\vec{q}(x)$. Funkcija $\vec{q}(x)$ definirana je i na krajevima $x = 0$ i $x = l$; $\vec{q}(l)$ i $-\vec{q}(0)$ su **vanjske kontaktne sile.** Ako je $x_1 \leq x_2$, na dio $\widehat{P(x_1)P(x_2)}$ djeluje *ukupna kontaktna sila*



Slika 3.

$$\vec{q}(x_2) - \vec{q}(x_1). \tag{6}$$

Neka je $\vec{t}(x)$ jedinični tangencijalni vektor žice u točki $P(x)$:

$$\vec{t}(x) = \frac{\vec{i} + u'(x)\vec{j}}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}. \tag{7}$$

Prema (2) vrijedi

$$1 + (u'(x))^2 \approx 1, \tag{8}$$

pa ćemo pisati

$$\vec{t}(x) = \vec{i} + u'(x)\vec{j}. \tag{9}$$

Ako je deformacija mala, kontaktna sila je tangencijalna na žicu:

$$\vec{q}(x) = a(x)\vec{t}(x); \tag{10}$$

$a(x)$ je *napetost* žice u točki $P(x)$. *U daljnjem ćemo pretpostavljati da je žica napeta u svakoj točki, tj. da vrijedi*

$$a(x) > 0 \ \textit{za svako} \ x \in [0, l]. \tag{11}$$

Iz (9) i (10) slijedi

$$\vec{q}(x) = a(x)\vec{i} + a(x)u'(x)\vec{j}. \tag{12}$$

Stavljajući $\vec{q} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j}$, iz (12) dobivamo

$$q_x(x) = a(x), \tag{13}$$

$$q_y(x) = a(x)\, u'(x). \tag{14}$$

Prema (13) *uzdužna kontaktna sila je napetost* žice. Pretpostavka (11) posebno znači da je $q_x(l) > 0$ i $q_x(0) > 0$.

Vanjska linijska sila je *raspoređena* po žici. Neka je $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j}$ *linijska gustoća* te sile, to jest *vanjska sila po jedinici duljine* žice. Zbog (8) za element luka žice imamo

$$ds = \sqrt{1 + (u')^2}\, dx \approx dx; \tag{15}$$

zato pod veličinom $\vec{f}$ možemo razumijevati silu po jedinici duljine nedeformirane žice. *Ukupna linijska sila* koja djeluje na komad $\widehat{P(x_1)P(x_2)}$ $(x_1 \geq x_2)$ jednaka je

$$\int_{x_1}^{x_2} \vec{f}(x)\, dx = \vec{i}\int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\, dx + \vec{j}\int_{x_1}^{x_2} f_y(x)\, dx; \tag{16}$$

prvi član na desnoj strani je *uzdužna*, a drugi *poprečna linijska sila*.

Sad možemo primijeniti princip ravnoteže sile. Bit će dovoljno razmotriti dio $\widehat{P(x)P(l)}$ za *proizvoljno* x. Na taj dio prema (6) i (16) djeluju kontaktna sila $\vec{q}(x) - \vec{q}(0)$ i linijska sila $\int_0^x \vec{f}(\xi)\, d\xi$. Ako je žica u ravnoteži, onda je

$$\vec{q}(x) - \vec{q}(0) + \int_0^x \vec{f}(\xi)\, d\xi = 0, \tag{17}$$

ili u komponentama

$$q_x(x) - q_x(0) + \int_0^x f_x(\xi)\, d\xi = 0, \tag{18}$$

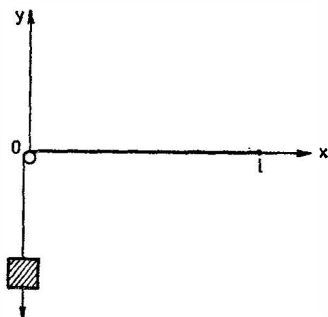
$$q_y(x) - q_y(0) + \int_0^x f_y(\xi)\, d\xi = 0. \tag{19}$$

Jednadžba (18) *izražava napetost* $q_x(x) = a(x)$ *pomoću vanjskih uzdužnih sila*:

$$a(x) = a(0) - \int_0^x f_x(\xi)\, d\xi. \tag{20}$$

Iz toga slijedi $a(l) = a(0) - \int_0^l f_x(\xi)\, d\xi$, ili $a(0) = a(l) + \int_0^l f_x(\xi)\, d\xi$; uvrštavajući to u (20) dobivamo *drugi oblik za napetost*:

$$a(x) = a(l) + \int_x^l f_x(\xi)\, d\xi. \tag{21}$$



Slika 4.

Prema tome *napetost u točki $P(x)$ jednaka je ukupnoj uzdužnoj vanjskoj sili koja djeluje na dio $\widehat{P(x)P}(l)$*. Budući da vanjske sile smatramo poznatim, u daljnjem ćemo i napetost $a(x)$ smatrati *zadanom funkcijom*. Posebno za $f_x = 0$ dobivamo $a(x) = a(l)$; dakle, *ako je žica napeta samo vanjskim kontaktnim silama, napetost je konstanta*. Najjednostavniji način da se žica napne je onaj na glazbenim instrumentima; napetost u tom slučaju nije dana neposredno, već se mora mjeriti. Zgodan način na koji možemo zadati napetost jest da se za kraj žice objesi uteg (sl. 4). Ako je masa utega $M > 0$ a g ubrzanje teže ($g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$), onda za napetost imamo $a(x) = a(0) = gM$. Jedna druga mogućnost opisana je u slijedećem primjeru.

1.1. Primjer

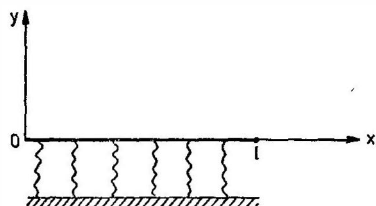
Teška žica (to jest žica na koju djeluje sila teža) slobodno visi obješena za jedan kraj i zauzima odsječak $[0, l]$ na osi x. Treba odrediti napetost žice.

Neka je ϱ *linijska gustoća mase* žice (to jest *masa jedinice duljine*); tada je gustoća vanjske uzdužne linijske sile (to jest težine) jednako $f_x = \varrho g$. Kraj $x = l$ slobodno visi pa je $q_x(l) = a(l) = 0$. Prema (21) dobivamo

$$a(x) = gM(x, l), \tag{22}$$

gdje je $M(x, l)$ masa komada (x, l). Primijetimo da u ovom primjeru napetost ne zadovoljava uvjet (11). Žica će biti »dobro« napeta ako se kraj $x = l$ optereti utegom $M_0 > 0$; tada je

$$a(x) = gM(x, l) + gM_0. \tag{23}$$



Slika 5.

Jednadžba (19) opisuje *poprečnu ravnotežu* žice. Ako se žica nalazi u nekom *elastičnom sredstvu* (sl. 5), onda na nju pored linijske sile zadane gustoće $f(x)$ djeluje i linijska sila s gustoćom koja je suprotna progibu, to jest oblika

$$-b(x)\, u(x); \tag{24}$$

ovdje je $b(x) \geq 0$ zadani koeficijent elastičnosti sredstva. Umjesto (19) tada imamo

$$q(x) - q(0) + \int_0^x (f(\xi) - b(\xi)\, u(\xi))\, d\xi = 0, \tag{25}$$

gdje smo radi kratkoće stavili

$$q_y = q, \ f_y = f. \tag{26}$$

Vezu (poprečne) kontaktne sile i (poprečne) deformacije daje jednadžba (14), koja se zove **zakon ponašanja;** u novoj oznaci on glasi

$$q(x) = a(x)\, u'(x). \tag{27}$$

Uvrštavajući (27) u (25) dobivamo

$$a(x)\, u'(x) - a(0)\, u'(0) + \int_0^x (f(\xi) - b(\xi)\, u(\xi))\, d\xi = 0. \tag{28}$$

To je **integralni oblik zakona ravnoteže (integralna jednadžba ravnoteže).** Derivirajući (28) po x dobivamo

$$(a(x)\, u'(x))' + f(x) - b(x)\, u(x) = 0, \tag{29}$$

ili

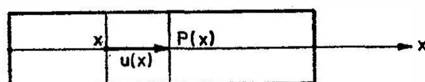
$$-(a(x)\, u'(x))' + b(x)\, u(x) = f(x). \tag{30}$$

To je **diferencijalni oblik zakona ravnoteže (diferencijalna jednadžba ravnoteže)** ili kraće **jednadžbe ravnoteže.** Iz (30) integriranjem dobivamo (28). Drugim riječima, *jednadžbe* (30) i (28) *su ekvivalentne.*

Jednadžba ravnoteže (30) je *obična linearna diferencijalna jednadžba drugog reda* za funkciju u; a i b su *koeficijenti*, a f *slobodni član* ili *desna strana* jednadžbe. Jednadžba je *homogena* ako je $f = 0$ a *nehomogena* ako je $f \neq 0$. Funkcija u koja zadovoljava jednadžbu ravnoteže zove se **ravnotežno (stacionarno) stanje** ili **ravnotežni položaj (progib).**

1.2. Zadaci

1.2.1. Napišite jednadžbu ravnoteže *uzdužno deformiranoga* cilindričnog štapa (sl. 6).

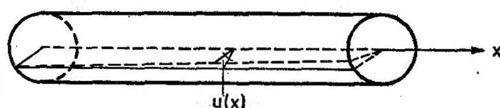


Slika 6.

Rješenje. Pri maloj uzdužnoj deformaciji poprečni presjek štapa pomakne se od *nedeformiranog* položaja x u *deformirani* položaj $P(x) = x + u(x)$; $u(x)$ je *po-*

mak, a $u'(x)$ *deformacija* na mjestu x. Neka je $q(x)$ *kontaktna sila* na mjestu x, to jest (uzdužna) sila kojom komad $(P(x), P(l))$ djeluje na komad $(P(0), P(x))$. *Zakon ponašanja* (*Hookeov zakon*) ima oblik (27), gdje je $a = ES$; ovdje je $E > 0$ *Youngov modul* materijala, a S površina poprečnog presjeka. Za *homogeni* materijal E je konstanta. Neka je f gustoća *vanjske longitudinalne linijske sile* koja djeluje na štap. Iz principa ravnoteže sile slijedi jednadžba (30) (sa $b = 0$).

1.2.2. Napišite jednadžbu ravnoteže štapa kružnog presjeka koji je podvrgnut *torziji* oko svoje osi (sl. 7).



Slika 7.

Rješenje. Pri maloj *torzionoj deformaciji* poprečni presjek štapa na mjestu x zakrene se oko osi x za kut $u(x)$; $u'(x)$ je *deformacija* na mjestu x. Uzrok zakreta je *moment* (kao što je uzrok pomaka sila). Neka je $q(x)$ *kontaktni moment* na mjestu x, to jest (uzdužni) moment kojim dio (x, l) djeluje na dio $(0, x)$. *Zakon ponašanja* ima oblik (27), gdje je $a = \mu R^4 \pi/2$; ovdje je $\mu > 0$ *modul smicanja* materijala, a R radijus štapa. Za homogeni štap μ je konstanta. Neka je f *gustoća vanjskog* (*uzdužnog*) *linijskog momenta* koji djeluje na štap. **Princip ravnoteže momenta** glasi ovako: *Ako je tijelo u ravnoteži, zbroj svih momenata koji djeluju na bilo koji komad tijela jednak je nuli.* Iz toga slijedi jednadžba (30) (sa $b = 0$).

1.2.3. Napišite jednadžbu stacionarnog *provođenja topline* kroz štap.

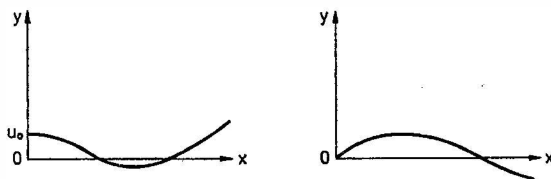
Rješenje. Označimo sa $u(x)$ *temperaturu* poprečnog presjeka štapa na mjestu $x \in (0, l)$. Neka je $q(x)$ *kontaktni tok* (*fluks*) *topline* na mjestu x, to jest količina topline koja u jedinici vremena prijeđe iz dijela (x, l) u dio $(0, x)$. *Zakon ponašanja* (*Fourierov zakon*) ima oblik (27), gdje je $a = \varkappa S$; ovdje je $\varkappa > 0$ *koeficijent provođenja* materijala, a S površina poprečnog presjeka. (*Fourierov zakon* odgovara našemu svakidašnjem iskustvu po kojem toplina uvijek prelazi s toplijeg na hladnije, to brže što temperatura jače varira.) Neka je f *gustoća linijskog toka topline*, to jest. količina topline koja se (izvana) prenese na jedinicu duljine štapa u jedinici vremena. **Princip stacionarnog provođenja topline** glasi ovako: *Ako je provođenje topline kroz tijelo stacionarno, ukupni toplinski tok* (*toplina po jedinici vremena*) *koji se prenosi na bilo koji komad tijela jednak je nuli*. Iz toga slijedi jednadžba (30) (sa $b = 0$).

§ 2. Rubni uvjeti

Uz zadane funkcije a, b i f jednadžba ravnoteže (1.30) ima opće rješenje u koje ulaze dvije proizvoljne konstante; prema tome, ona ima beskonačno mnogo rješenja. Nas zanima rješenje koje predstavlja *ravnotežni progib žice u zadanim vanjskim uvjetima.* Osim podataka a, b i f tim uvjetima pripadaju i poprečne sile na krajevima; one se (posredno ili neposredno) opisuju tzv. *rubnim uvjetima.*

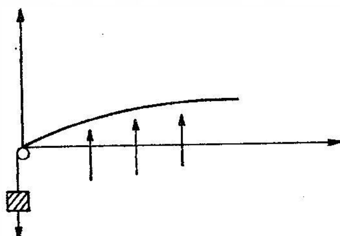
Ako je na kraju $x = 0$ *zadan progib* u_0, onda je

$$u(0) = u_0. \tag{1}$$



Slika 1.

(U tom slučaju poprečna sila na kraju nije zadana, nego se očituje kao *reakcija* fiksiranog položaja.) Ako je $u_0 = 0$, kažemo da je kraj *učvršćen* (sl. 1). Najjednostavniji način da se kraj učvrsti jest onaj na glazbenim instrumentima. Ako je za kraj obješen uteg mase $M > 0$ (kojim se realizira napetost) kao na sl. 2, onda je taj kraj nužno učvršćen. Naime, *pretpostavka da je vanjska poprečna sila slaba znači da je ona mnogo manja od napetosti* (v. § 5), u našem slučaju od težine utega; zbog zakona ravnoteže ta sila ne može podići uteg.



Slika 2.

Ako je na kraju $x = 0$ *zadana poprečna kontaktna sila* q_0, onda je

$$q(0) = q_0; \tag{2}$$

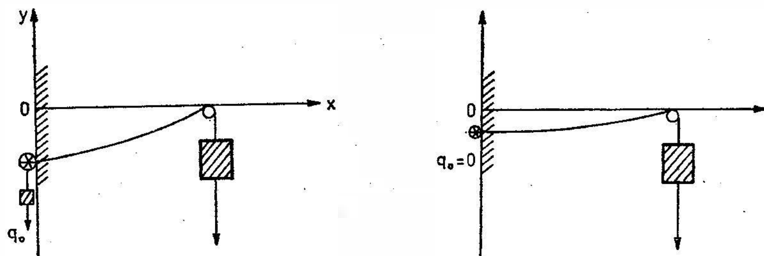
uzimajući u obzir (1.11) i (1.27), umjesto (2) pišemo

$$u'(0) = c = \frac{q_0}{a(0)}. \tag{3}$$

Ako je $q_0 = 0$, kraj je *slobodan*; u tom slučaju imamo

$$u'(0) = 0. \tag{3'}$$

Prema tome, *tangenta u slobodnom kraju žice paralelna je s osi x* (primijetimo da je to posljedica pretpostavke $a(0) > 0$). Uvjet (3) (uz $q_0 \geq 0$) može se realizirati tako da se kraj veže za kotačić koji se može slobodno kotrljati u poprečnom žlijebu i da se za kotačić veže uteg težine q_0 (sl. 3).



Slika 3.

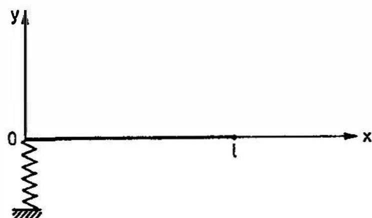
Ako je kraj $x = 0$ *elastično vezan* sl. 4), onda je

$$q(0) - \varkappa u(0) = 0, \tag{4}$$

gdje je $\varkappa > 0$ zadani koeficijent; uzimajući opet u obzir (1.11) i (1.27), umjesto (4) pišemo

$$u'(0) - k u(0) = 0, \tag{5}$$

gdje je $k = \varkappa / a(0)$.



Slika 4.

Isti tipovi rubnih uvjeta definiraju se za kraj $x = l$.

Poopćenje uvjeta (1), (3) i (5) su **rubni uvjeti:**

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = c \tag{6}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = d, \tag{7}$$

gdje su α, β, γ, δ, c i d zadani brojevi koji zadovoljavaju **nejednakosti**

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0, \tag{8}$$

$$\gamma \geq 0, \delta \geq 0, \gamma + \delta > 0. \tag{9}$$

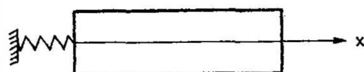
Ako je $\alpha = 0$, rubni uvjet (6) je *geometrijski* ili **Dirichletov**; ako je $\alpha \neq 0$, uvjet (6) je *prirodni* ili **Neumannov**. Učvršćenom kraju odgovara Dirichletov, a slobodnom i elastično vezanom Neumannov rubni uvjet. Uvjet (6) je *homogen* ako je $c =$ $= 0$, a *nehomogen* ako je $c \neq 0$.

Problem nalaženja rješenja jednadžbe (1.30) koje zadovoljava uvjete (6) i (7) zove se ravnotežni **rubni problem**. Očekujemo da će uvjeti (6) i (7) biti dovoljni za jednoznačno određivanje proizvoljnih konstanta u općem rješenju jednadžbe (1.30). Drugim riječima, očekujemo da rubni problem ima *jedinstveno* rješenje.

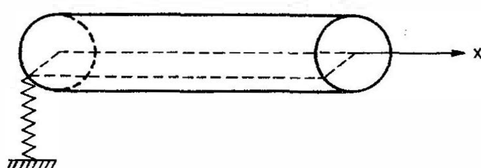
2.1. Zadaci

2.1.1. Interpretirajte rubne uvjete (1), (3) i (5) u slučaju (*i*) longitudinalne deformacije štapa, (*ii*) torzione deformacije štapa i (*iii*) stacionarnog provođenja topline.

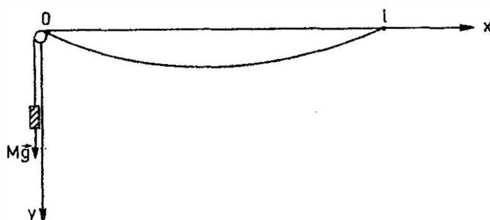
Rješenje. (*i*) Uvjet (1) označuje da je presjek $x = 0$ pričvršćen za krutu stijenku; uvjet (3) odnosno (5) označuje da je presjek slobodan odnosno elastično vezan (sl. 5). (*ii*) Uvjet (1) označuje da je presjek $x = 0$ pričvršćen za krutu stijenku; uvjet (3) odnosno (5) označuje da je presjek $x = 0$ slobodan odnosno elastično vezan (sl. 6). (*iii*) Uvjet (1) označuje da se presjek $x = 0$ održava na temperaturi 0° (na primjer, pomoću toplinskog spremnika); uvjet (3) označuje da je presjek toplinski izoliran; uvjet (5) označuje da se na presjeku nalazi termički regulator.



Slika 5.

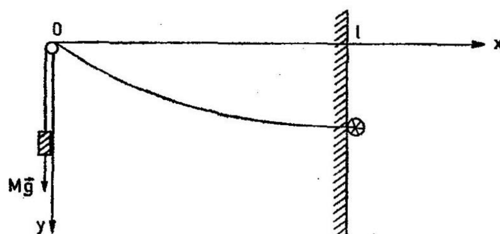


Slika 6.



Slika 7.

2.1.2. Homogena teška žica napeta je horizontalno utegom mase $M > 0$* na kraju $x = 0$. Odredite ravnotežni progib ako je drugi kraj (*i*) učvršćen (sl. 7), (*ii*) slobodan (sl. 8).



Slika 8.

Rješenje. Zbog homogenosti linijska gustoća mase ϱ je konstanta. Vanjska sila je težina pa je $f = \varrho\, g$. Iz jednadžbe

$$-g\, M\, u'' = \varrho\, g \tag{10}$$

dobivamo

$$u'(x) = -\frac{\varrho}{M}x + C_1, \tag{11}$$

$$u(x) = -\frac{\varrho}{2M}x^2 + C_1 x + C_2, \tag{12}$$

---

* Ovdje kao i u daljnjem pretpostavljamo da je težina žice mnogo manja od težine utega kojim je ona napeta.

gdje su C_1 i C_2 konstante. (i) Iz uvjeta $u(0) = u(l) = 0$ i (12) nalazimo $C_1 = \varrho l/2M$, $C_2 = 0$,

$$u(x) = \frac{\varrho}{2M} x(l - x). \tag{13}$$

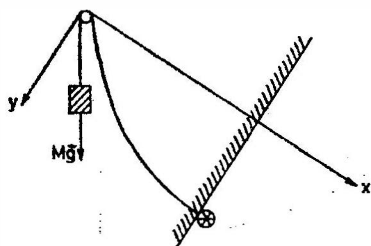
(ii) Iz uvjeta $u(0) = u'(l) = 0$, (11) i (12) nalazimo $C_1 = \varrho\, l/M$, $C_2 = 0$,

$$u(x) = \frac{\varrho}{2M} x(2l - x). \tag{14}$$

2.1.3. Teška homogena žica napeta je koso utegom mase $M > 0$ na kraju $x = 0$. Odredite ravnotežni progib ako je drugi kraj slobodan (sl. 9).

Rješenje. Imamo

$$f_x(x) = \varrho\, g \cos\varphi, f(x) = f_y(x) = \varrho\, g \sin\varphi. \tag{15}$$



Slika 9.

Prema (1.20) napetost je

$$a(x) = Mg + (l - x)\, \varrho\, g \cos\varphi. \tag{16}$$

Jednadžba ravnoteže glasi

$$((Mg + (l - x)\, \varrho\, g \cos\varphi)\, u'(x))' = -\varrho\, g \sin\varphi. \tag{17}$$

Iz toga i uvjeta $u'(l) = 0$, $u(0) = 0$ dobivamo

$$u'(x) = \frac{\varrho\, g \sin\varphi \cdot (l - x)}{Mg + (l - x)\, \varrho\, g \cos\varphi}, \tag{18}$$

$$u(x) = \int_0^x \frac{\varrho\, g \sin\varphi \cdot (l - x)\, \mathrm{d}x}{Mg + (l - x)\, \varrho\, g \cos\varphi} = x \operatorname{tg}\varphi + \tag{19}$$

$$+ \frac{M \sin\varphi}{\varrho \cos^2\varphi} \ln\left(1 - \frac{x\, \varrho \cos\varphi}{M + l\, \varrho \cos\varphi}\right).$$

2.1.4. Teška homogena žica napeta je horizontalno utegom mase M na kraju $x = 0$, a nalazi se u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti b. Odredite ravnotežni progib ako je drugi kraj slobodan.

Rješenje. Jednadžba ravnoteže je

$$u'' - k^2 u = -\frac{\varrho}{M}, \tag{20}$$

gdje je $k = \sqrt{b/Mg}$. Partikularno rješenje je konstanta $\varrho g/b$. Opće rješenje homogene jednadžbe je $A \operatorname{ch} kx + B \operatorname{sh} kx$, pa opće rješenje jednadžbe (20) glasi

$$u(x) = A \operatorname{ch} kx + B \operatorname{sh} kx + \frac{\varrho g}{b}. \tag{21}$$

Iz uvjeta $u(0) = u'(l) = 0$ dobivamo

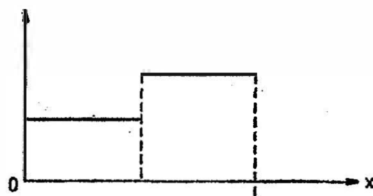
$$A = -\frac{\varrho g}{b}, \qquad B = \frac{\varrho g}{b} \operatorname{th} kl. \tag{22}$$

Ravnotežni progib je

$$u(x) = \frac{\varrho g}{b}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} k(x - l)}{\operatorname{ch} kl}\right). \tag{23}$$

§ 3. Postavka rubnog problema

Budući da u našim razmatranjima upotrebljavamo postupke diferencijalnog i integralnog računa, moramo pretpostavljati da funkcije a, b, f i u posjeduju »dovoljnu glatkost«. U tom pogledu integralni i diferencijalni oblik zakona ravnoteže nisu potpuno ekvivalentni. Poći ćemo od integralnog oblika (1.28), jer on stavlja slabije zahtjeve na pomenute funkcije. Najjednostavnije je pretpostaviti da funkcija a ima neprekidnu prvu derivaciju, da su funkcije b i f neprekidne i da funkcija u ima neprekidnu prvu derivaciju (v. zadatke 2.2—2.4). Iz jednadžbe (1.28) odmah slijedi (v. § 1) da funkcija $a(x)\,u'(x)$ ima neprekidnu prvu derivaciju, to jest da funkcija u ima neprekidnu drugu derivaciju te da zadovoljava diferencijalnu jednadžbu (1.30). Te pretpostavke su međutim preuske za slučajeve koji se pojavljuju u praksi. Često funkcije a', b i f imaju u konačnom broju točaka skokove (prekide prve vrste, sl. 1). Integralna jednadžba ravnoteže i u tom slučaju ima smisla, čak ako pretpostavimo da i derivacija funkcije u ima u konačnom broju točaka skokove.



Slika 1.

Iz jednadžbe odmah slijedi da je funkcija $a(x)\,u'(x)$ neprekidna (jer je integral funkcije koja ima konačan broj skokova neprekidna funkcija gornje granice), a to znači da je i funkcija $u'(x)$ nužno neprekidna. Međutim, u točki x_0 u kojoj neka od funkcija a', b i f ima skok, funkcija $u(x)$ nema drugu derivaciju ($u''(x)$ ima skok), pa u takvoj točki nije zadovoljena diferencijalna jednadžba ravnoteže. Umjesto toga imamo samo uvjete neprekidnosti progiba i njegove derivacije:

$$u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0), \tag{1}$$

$$u'(x_0 - 0) = u'(x_0 + 0). \tag{2}$$

3.1. Primjer

Teška žica sastavljena je od dvaju homogenih komada $(0, x_0)$ i (x_0, l) (s linijskim gustoćama mase ϱ_1 i ϱ_2) i napeta horizontalno utegom mase $M > 0$ na kraju $x = 0$. Treba odrediti ravnotežni progib ako je drugi kraj učvršćen.

Gustoća vanjske linijske sile ima u točki x_0 skok i dana je formulom

$$f(x) = \begin{cases} \varrho_1 g, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \varrho_2 g, & x_0 \leq x \leq l. \end{cases} \tag{3}$$

Prema tome, jednadžba ravnoteže glasi ovako:

$$-gM\,u''(x) = \varrho_1 g,\ x \in (0, x_0) \tag{4}$$

$$-gM\,u''(x) = \varrho_2 g,\ x \in (x_0, l). \tag{5}$$

Uzimajući u obzir uvjete $u(0) = u(l) = 0$ iz (4) i (5) dobivamo

$$u'(x) = -\frac{\varrho_1 x}{M} + C, \tag{6}$$

$$u(x) = -\frac{\varrho_1 x^2}{2M} + Cx \tag{7}$$

za $x \in (0, x_0)$ i

$$u'(x) = -\frac{\varrho_2 x}{M} + D, \tag{8}$$

$$u(x) = -\frac{\varrho_2}{2M}(x^2 - l^2) + D(x - l) \tag{9}$$

za $x \in (x_0, l)$; ovdje su C i D konstante. Uzimajući u obzir uvjete (1) i (2), iz (8)—(9) dobivamo za C i D sustav

$$C - D = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{M} x_0 \tag{10}$$

$$x_0 C + (l - x_0) D = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2M} x_0^2 + \frac{\varrho_2}{2M} l^2. \tag{11}$$

Iz toga nalazimo

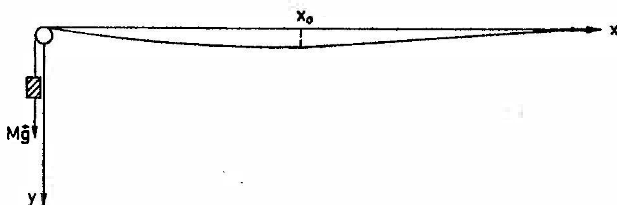
$$C = \frac{\varrho_2 l}{2M} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2M\, l} x_0^2 + \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{M} x_0, \tag{12}$$

$$D = \frac{\varrho_2 l}{2M} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2M\, l} x_0^2, \tag{13}$$

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{\varrho_1 x^2}{2M} + \left(\dfrac{\varrho_2 l}{2M} - \dfrac{\varrho_1 - \varrho_2}{2M\, l} x_0^2 + \dfrac{\varrho_1 - \varrho_2}{M} x_0\right) x, & x \in (0, x_0) \\ -\dfrac{\varrho_2}{2M}(x^2 - l^2) + \left(\dfrac{\varrho_2 l}{2M} - \dfrac{\varrho_1 - \varrho_2}{2M\, l} x_0^2\right)(x - l), & x \in (x_0, l). \end{cases} \tag{14}$$

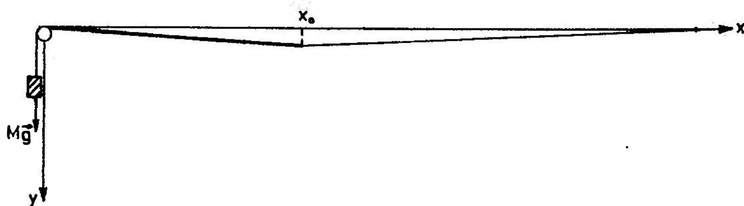
Uzmemo li (u (14) limes za $\varrho_2 \to 0$, a zatim $l \to \infty$, dobivamo

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{\varrho_1 x^2}{2M} + \dfrac{\varrho_1 x_0 x}{M}, & x \in (0, x_0) \\ \dfrac{\varrho_1 x_0^2}{2M}, & x \notin (0, x_0). \end{cases} \tag{15}$$



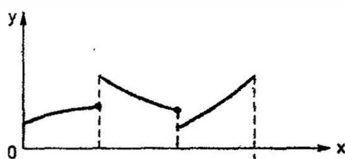
Slika 2.

Usporedivši to s rezultatom zadatka 2.1.2, vidimo da se *slobodni kraj može realizirati i tako da se zadana žica veže za dodatnu dugačku žicu zanemarive mase* (sl. 2,3).

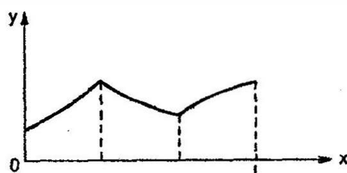


Slika 3.

* Da bismo preciznije postavili rubni problem, uvest ćemo pojam *po dijelovima glatke funkcije*. Funkcija definirana na segmentu $[0, l]$ je **po dijelovima neprekidna,** ako je neprekidna svuda osim u konačno mnogo točaka intervala $(0, l)$ u kojima ima prekid prve vrste i u kojima je neprekidna zdesna (sl. 4). Skup svih takvih funkcija označavat ćemo sa $\mathscr{H}^0(0, l)$ (kraće sa $\mathscr{H}^0$). Funkcija definirana na segmentu $[0, l]$ je **po dijelovima neprekidno diferencijabilna,** ako je neprekidna svuda i ako ima neprekidnu derivaciju svuda osim u konačno mnogo točaka intervala $(0, l)$ u kojima derivacija ima prekid prve vrste (sl. 5). Skup svih takvih funkcija označavat ćemo sa $\mathscr{H}^1(0, l)$ (kraće sa $\mathscr{H}^1$). Slično se definira skup $\mathscr{H}^k(0, l)$ svih funkcija kojima je k-ta derivacija po dijelovima neprekidna.



Slika 4.



Slika 5.

Ako je $v \in \mathscr{H}^1(0, l)$, onda je v' očito restrikcija neke funkcije iz $\mathscr{H}^0(0, l)$, koju također označujemo sa v' i zovemo derivacija funkcije v na segmentu $[0, l]$. Slično postupamo i s k-tom derivacijom funkcije iz $\mathscr{H}^k(0, l)$.

Navest ćemo *pregled osnovnih svojstava skupa* $\mathscr{H}^k(0, l)$.

(*i*) *Funkcija* $v \in \mathscr{H}^k$ *ima sve derivacije reda nižeg od* k *neprekidne na* $[0, l]$**.

(*ii*) *Ako je* $v \in \mathscr{H}^k$, *onda je* $v^{(m)} \in \mathscr{H}^{k-m}$ $(m \leq k)$.

(*iii*) *Ako je* $v, w \in \mathscr{H}^k$, *onda je* $v + w \in \mathscr{H}^k$, $v \cdot w \in \mathscr{H}^k$; *iz toga posebno slijedi da je* $\mathscr{H}^k$ *linearni prostor. Vrijede formule*

$$(v + w)^{(m)} = v^{(m)} + w^{(m)}, \; (v \cdot w)^{(m)} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} v^{(m-r)} w^{(r)}. \tag{16}$$

(*iv*) *Ako je* $v \in \mathscr{H}^1$, *onda je*

$$\int_{x_1}^{x_2} v'(x) \, dx = v(x_2) - v(x_1). \tag{17}$$

(*v*) *Ako je* $v \in \mathscr{H}^0$ *i*

$$w(x) = \int_0^x v(\xi) \, d\xi, \tag{18}$$

onda je $w \in \mathscr{H}^1$ *i* $w' = v$.

---

* Tekst koji slijedi (do točke 3.2) može se ispustiti kod prvog čitanja.

** Pod nultom derivacijom razumijevamo samu funkciju.

(*vi*) *Za* $v, w \in \mathscr{H}^1$ *vrijedi formula parcijalne integracije*

$$\int_{x_1}^{x_2} v'(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = v(x_2)\,w(x_2) - v(x_1)\,w(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} v(x)\,w'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (19)$$

(*vii*) *Za* $v \in \mathscr{H}^1$ *vrijedi nejednakost*

$$|v(x_1) - v(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \sup_{x \in [0,l]} |v'(x)|. \qquad (20)$$

U daljnjem ćemo pretpostavljati da je

$$a \in \mathscr{H}^1(0, l),\ b \in \mathscr{H}^0(0, l),\ f \in \mathscr{H}^0(0, l). \qquad (21)$$

Polazeći od integralne jednadžbe ravnoteže (1.28), pretpostavit ćemo da je $u \in \mathscr{H}^1(0, l)$. Kao što smo zaključili na početku ovog paragrafa, iz toga odmah slijedi da je $u \in \mathscr{H}^2(0, l)$. Diferencijalna jednadžba ravnoteže narušena je u točkama prekida funkcija a', b i f; u tim točkama ona nema drugu derivaciju. Taj »nedostatak« u konačnom broju točaka ćemo zanemariti i reći da *funkcija u zadovoljava diferencijalnu jednadžbu ravnoteže na segmentu* $[0, l]$. *Uz takav dogovor jednadžbe* (1.28) i (1.30) *postaju ekvivalentne.*

Rubni problem možemo sada postaviti ovako:

Odrediti funkciju $u \in \mathscr{H}^2(0, l)$ *koja zadovoljava jednadžbu ravnoteže* (1.30) *na segmentu* $[0, l]$ i *rubne uvjete na krajevima.*

3.2. Zadaci

3.2.1. Teška homogena žica napeta je horizontalno utegom mase $M > 0$ na kraju $x = 0$. Na dio $(x_0, l)\,(0 < x_0 < l)$ djeluje elastična sila s koeficijentom $b = \text{const.} > 0$. Odredite progib, ako je drugi kraj žice učvršćen.

Rješenje. Jednadžba ravnoteže glasi ovako:

$$-u''(x) = \frac{\varrho}{M},\ x \in (0, x_0), \qquad (22)$$

$$-u''(x) + k^2 u(x) = \frac{\varrho}{M},\ x \in (x_0, l), \qquad (23)$$

gdje je $k = (b/gM)^{1/2}$. Uzimajući u obzir uvjete $u(0) = 0$ i $u(l) = 0$ iz toga dobivamo

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{\varrho}{2M}x^2 + Cx, & x \in (0, x_0) \\ (D(\operatorname{ch} kx - \operatorname{cth} kl \operatorname{sh} kx) + \dfrac{\varrho}{Mk^2}\left(1 - \dfrac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} k}\right), & x \in (x_0, l), \end{cases} \qquad (24)$$

gdje su C i D konstante. Iz (1), (2) i (24) dobivamo za C i D sustav

$$x_0 C - (\operatorname{ch} k x_0 - \operatorname{cth} kl \operatorname{sh} kx_0) D = \frac{\varrho\, x_0^2}{2M} + \frac{\varrho}{Mk^2}\left(1 - \frac{\operatorname{sh} kx_0}{\operatorname{sh} kl}\right) \tag{25}$$

$$C - k(\operatorname{sh} kx_0 - \operatorname{cth} kl \operatorname{ch} kx_0) D = \frac{\varrho\, x_0}{M} - \frac{\varrho}{Mk}\frac{\operatorname{ch} kx_0}{\operatorname{sh} kl}. \tag{26}$$

Iz toga nalazimo

$$C = \frac{\frac{\varrho}{M}\left(\frac{kx_0^2}{2} + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{\operatorname{sh} kx_0}{\operatorname{sh} kl}\right)\right) + \frac{\varrho}{M}\left(x_0 - \frac{1}{k}\frac{\operatorname{ch} kx_0}{\operatorname{sh} kl}\right)\operatorname{th} k(l - x_0)}{kx_0 + \operatorname{th} k(l - x_0)}, \tag{27}$$

$$D = \frac{\varrho}{M}\left(\frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0}{k}\frac{\operatorname{ch} kx_0}{\operatorname{sh} kl} - \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{\operatorname{sh} kx_0}{\operatorname{sh} kl}\right)\right)\frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} k(l - x_0)(kx_0 + \operatorname{th} k(l - x_0))} \tag{28}$$

3.2.2. Teška žica sastavljena je od dvaju homogenih komada $(0, x_0)$ i (x_0, l), s linijskim gustoćama mase ϱ_1 i ϱ_2, i napeta je vertikalno utegom mase $M > 0$. Odredite ravnotežni progib ako je $u(0) = 0$, $u(l) = d > 0$.

Rješenje. Prema (1.22) napetost je

$$a(x) = Mg + \begin{cases} \varrho_1 g(x_0 - x) + \varrho_2 g(l - x_0), & x < x_0 \\ (\varrho_2 g(l - x), & x_0 \leq x. \end{cases} \tag{29}$$

Jednadžba ravnoteže glasi ovako:

$$((Mg + \varrho_1 g(x_0 - x) + \varrho_2 g(l - x_0))\, u'(x))' = 0, \; x \in (0, x_0), \tag{30}$$

$$((Mg + \varrho_2 g(l - x))\, u'(x))' = 0, \; x \in (x_0, l). \tag{31}$$

Uzimajući u obzir uvjete $u(0) = 0$ i $u(l) = d$, iz toga dobivamo

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{C}{\varrho_1 g}\ln\left(1 - \frac{\varrho_1}{M + \varrho_1 x_0 + \varrho_2(l - x_0)}x\right), & x \in (0, x_0) \\ -\frac{D}{\varrho_2 g}\ln\left(1 + \frac{\varrho_2}{M}(l - x)\right) + d, & x \in (x_0, l), \end{cases} \tag{32}$$

gdje su C i D konstante. Iz (1), (2) i (32) dobivamo

$$C = D = \frac{dg}{-\frac{1}{\varrho_1}\ln\left(1 - \frac{\varrho_1 x_0}{M + \varrho_1 x_0 + \varrho_2(l - x_0)}\right) + \frac{1}{\varrho_2}\ln\left(l + \frac{\varrho_2}{M}(l - x_0)\right)}. \tag{33}$$

§ 4. Princip superpozicije

Ako funkcije $u_1, u_2, \ldots, u_n$ imaju isto područje definicije i ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ brojevi, onda se funkcija

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n \tag{1}$$

zove *linearna kombinacija* ili *superpozicija* funkcija $u_1, u_2, \ldots, u_n$; brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ su *koeficijenti* te linearne kombinacije.

4.1. Lema

Proizvoljna superpozicija rješenja homogene jednadžbe

$$(au')' - bu = 0 \tag{2}$$

također *je rješenje te jednadžbe.*

4.2. Lema

Proizvoljna superpozicija funkcija koje zadovoljavaju homogeni rubni uvjet

$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = 0 \tag{3}$$

odnosno

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = 0 \tag{4}$$

također zadovoljava taj uvjet.

Gornje leme se nazivaju zajedničkim imenom **princip superpozicije.** Taj princip kazuje da su jednadžba ravnoteže (1.30) i rubni uvjeti (2.6) i (2.7) *linearni*; kraće, da je rubni problem (1.30), (2.6), (2.7) **linearan**. Općenitiji oblik principa superpozicije daje sljedeća lema.

4.3. Lema

Ako je funkcija u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ rješenje rubnog problema

$$(au_i') - bu_i + f_i = 0 \tag{5}$$

$$\alpha\, u_i'(0) - \beta\, u_i(0) = c_i \tag{6}$$

$$\gamma\, u_i'(l) + \delta\, u_i(1) = d_i, \tag{7}$$

onda je superpozicija

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \tag{8}$$

s proizvoljnim koeficijentima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, rješenje problema

$$(au')' - bu + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0 \tag{9}$$

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \tag{10}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i. \tag{11}$$

Dokaz ove leme, koji je posve elementaran, prepuštamo čitatelju.

Princip superpozicije (linearnost problema) omogućuje jednostavan postupak *homogenizacije* rubnih uvjeta, koji se sastoji u sljedećem. Neka je u rješenje problema

$$(a u')' - bu + f = 0 \tag{12}$$

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = c \tag{13}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = d. \tag{14}$$

Neka funkcija v zadovoljava uvjete (13) i (14) i neka je $u_1 = u - v$. Uvrstivši $u = u_1 + v$ u (12), dobivamo

$$(au_1')' - bu_1 + f_1 = 0 \tag{15}$$

$$\alpha u_1'(0) - \beta u_1(0) = 0 \tag{16}$$

$$\gamma u_1'(l) + \delta u_1(l) = 0, \tag{17}$$

gdje je

$$f_1 = f + (av')' - bv. \tag{18}$$

Tako dobivamo rubni problem (15)—(17), u kome su rubni uvjeti homogeni i koji je *ekvivalentan* problemu (12)—(14) u ovom smislu: *funkcija u je rješenje problema* (12)—(14) *onda i samo onda, ako je funkcija* $u_1 = u - v$ *rješenje problema* (15)—(17).

4.4. Zadatak

Odredite linearnu funkciju v koja zadovoljava uvjete (13) i (14).

Rješenje. Neka je

$$v(x) = \zeta\, x + \vartheta. \tag{19}$$

Uvrstivši (19) u (13) i (14), dobivamo za ζ i ϑ linearni sustav

$$\alpha \zeta - \beta \vartheta = c \tag{20}$$

$$(\gamma + l \delta) \zeta + \delta \vartheta = d. \tag{21}$$

Zbog (2.8) i (2.9) determinanta tog sustava

$$\Delta = \alpha \delta + \beta \gamma + l \beta \delta \tag{22}$$

je pozitivna. Dobivamo

$$\zeta = \frac{c \delta + \mathrm{d} \beta}{\Delta}, \quad \vartheta = \frac{\mathrm{d} \alpha - c (\gamma + l \delta)}{\Delta}.$$

*U daljnjem ćemo pretpostavljati da su rubni uvjeti **homogeni**.*

§ 5. Slučaj $b = 0$

Ovdje ćemo se zadržati na problemu

$$(au')' + f = 0 \tag{1}$$

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = 0 \tag{2}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = 0. \tag{3}$$

Iz (1) slijedi

$$u'(x) = - \frac{1}{a(x)} \int_0^x f(\eta) \, \mathrm{d}\eta + \frac{C_1}{a(x)}, \tag{4}$$

$$u(x) = - \int_0^x \frac{\mathrm{d} \xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta) \, \mathrm{d}\eta + C_1 \int_0^x \frac{\mathrm{d} \xi}{a(\xi)} + C_2, \tag{5}$$

gdje su C_1 i C_2 konstante.

Funkcija (5) jest *opće rješenje* jednadžbe (1)*. Uvrstivši (4) i (5) u (2) i (3) dobivamo

$$\frac{\alpha C_1}{a(0)} - \beta C_2 = 0, \tag{6}$$

---

* Uz pretpostavke (3.21) funkcija (5) pripada skupu $\mathscr{H}^2$ i zadovoljava jednadžbu (1) u točkama neprekidnosti funkcija a' i f.

$$\left(\frac{\gamma}{a(l)} + \delta \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)}\right) C_1 + \delta C_2 = \frac{\gamma}{a(l)} \int_0^l f(\xi)\, d\xi + \delta \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^l a(\eta)\, d\eta. \tag{7}$$

To je linearni sustav za nepoznanice C_1 i C_2; determinanta tog sustava je

$$\Delta = \frac{1}{a(0)} \alpha \delta + \frac{1}{a(l)} \beta \gamma + \beta \delta \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)}. \tag{8}$$

Razlikujemo dva slučaja:

(i) $\beta + \delta > 0$. Tada iz (2.8), (2.9) i (8) slijedi $\Delta > 0$, pa sustav (6), (7) ima jedinstveno rješenje. Prema tome, *ako je* $\beta + \delta > 0$, *problem* (1)—(3) *ima jedno i samo jedno rješenje*; *rješenje je dano formulom* (5), *gdje je* (C_1, C_2) *rješenje sustava* (6), (7).

(ii) $\beta = \delta = 0$. Tada je $\Delta = 0$, pa sustav (6), (7) ili nema rješenja ili rješenje nije jedinstveno. Rubni uvjeti su

$$u'(0) = 0, \tag{9}$$

$$u'(l) = 0, \tag{10}$$

tj. radi se o slučaju kad su oba kraja slobodna. Zbog $\alpha, \gamma > 0$ iz (6) i (7) slijedi

$$C_1 = 0, \tag{11}$$

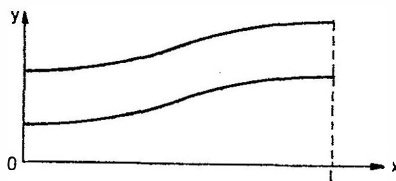
$$\int_0^l f(x)\, dx = 0. \tag{12}$$

Obratno, ako je zadovoljen uvjet (12), onda je za svako C_2 funkcija

$$u(x) = -\int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta + C_2 \tag{13}$$

rješenje problema (1)—(3). Imamo ovaj zaključak: *U slučaju* $\beta = \delta = 0$ *problem* (1)—(3) *ima rješenje ako i samo ako je zadovoljen uvjet* (12); *tada problem ima beskonačno mnogo rješenja i ona su dana formulom* (13) (to jest, *rješenje je određeno do na aditivnu konstantu*).

Kako su u slučaju (ii) poprečne kontaktne sile na krajevima jednake nuli, uvjet (12) znači da je ukupna (poprečna) sila koja djeluje na cijelu žicu jednaka nuli; kao što znamo od ranije, bez tog uvjeta nema ravnoteže. Ako je taj uvjet ispunjen, ravnotežni položaj je određen do na »*kruti*« *pomak* cijele žice (sl. 1); zato proizvoljnost konstante C_2 nema fizikalno značenje.



Slika 1.

Pri izvođenju jednadžbe ravnoteže (§ 1) pretpostavili smo *malu deformaciju* žice. Pokazat ćemo da su formule za rješenje, dobivene u ovom paragrafu, u skladu s tom pretpostavkom. Zbog jednostavnosti ograničit ćemo se na slučaj rubnih uvjeta

$$u(0) = u'(l) = 0. \tag{14}$$

Iz (4) i (14) dobivamo

$$u'(x) = \frac{1}{a(x)} \int_x^l f(\xi)\, d\xi. \tag{15}$$

Neka je

$$a_1 = \min_{x \in [0,l]} a(x). \tag{16}$$

Imamo

$$\left| \int_x^l f(\xi)\, d\xi \right| \leq \int_x^l |f(\xi)|\, d\xi \leq l \max_{x \in [0,l]} |f(x)|. \tag{17}$$

Iz (15)—(17) dobivamo

$$|u'(x)| \leq \frac{l}{a_1} \max_{x \in [0,l]} |f(x)|. \tag{18}$$

Ako je max $|f|$ dovoljno malo, desna, a time i lijeva strana u (18) je po volji mala. Imamo ovaj zaključak: *Ako je vanjska sila dovoljno mala* (*preciznije*: $l \max |f(x)| \ll a_1$), *ravnotežni progib zadovoljava uvjet* (1.2) (to jest, *deformacija je mala*). To svojstvo rubnog problema zove se **korektnost**.

5.1. Zadaci

5.1.1. Napišite rješenje problema (1)—(3) u slučaju (*i*) $\alpha = \gamma = 0$, (*ii*) $\alpha = \delta = 0$.

Rješenje. (*i*) Iz (6) i (7) dobivamo $C_2 = 0$,

$$C_1 = \left(\int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \right)^{-1} \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta, \tag{19}$$

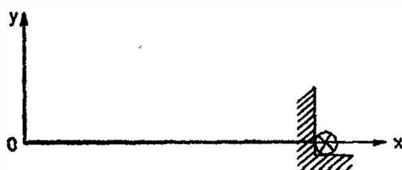
$$u(x) = -\int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta + \left(\int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)}\right)^{-1} \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta \int_0^x \frac{d\zeta}{a(\zeta)}. \quad (20)$$

(*ii*) Iz (6) i (7) dobivamo $C_2 = 0$,

$$C_1 = \int_0^l f(\eta)\, d\eta, \quad (21)$$

$$u(x) = -\int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta + \int_0^l f(\eta)\, d\eta \int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)}. \quad (22)$$

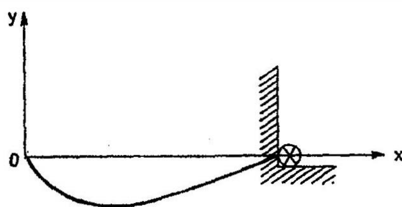
5.1.2. Postavite i riješite rubni problem (u slučaju $b = 0$) ako je kraj $x = 0$ učvršćen, a kraj $x = l$ *oslonjen* (sl. 2).



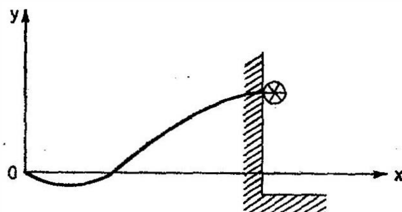
Slika 2.

Rješenje. Oslonjen kraj se ne može opisati uvjetom oblika (3); za njega postoje dvije mogućnosti: ili je u kontaktu s osloncem (sl. 3), ili nije (sl. 4). U prvom slučaju je $u(l) = 0$, $q(l) = a(l)\, u'(l) \geq 0$, a u drugom $u(l) > 0$, $q(l) = a(l)\, u'(l) = 0$. Prema tome, u oba slučaja je

$$u(l) \geq 0, \; u'(l) \geq 0, \; u(l)\, u'(l) = 0. \quad (23)$$



Slika 3.



Slika 4.

Taj uvjet je *jednostran* (*unilateralan*) i bitno se razlikuje od uvjeta (3) koji je *dvostran* (*bilateralan*). Uvjet (23) je *nelinearan*, jer za njega ne vrijedi princip superpozicije. Moramo razmotriti dvije mogućnosti.

(*i*) $u(l) = 0$. Rješenje je dano formulom (20), a nužno je $u'(l) \geq 0$, to jest

$$-\frac{1}{a(l)} \int_0^l f(\eta)\, d\eta + \frac{1}{a(l)} \left(\int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)}\right)^{-1} \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta \geq 0. \quad (24)$$

(*ii*) $u'(l) = 0$. Rješenje je dano formulom (22), a nužno je $u(l) \geq 0$, to jest

$$-\int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta + \int_0^l f(\eta)\, d\eta \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \geq 0. \tag{25}$$

Neka je

$$L = -\int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta + \int_0^l f(\eta)\, d\eta \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} = \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_\xi^l f(\eta)\, d\eta = \tag{26}$$

$$= \int_0^l f(\eta)\, d\eta \int_0^\eta \frac{d\xi}{a(\xi)}.$$

Iz (24) i (25) zaključujemo: Ako je $L \leq 0$, rješenje je dano formulom (20); ako je $L \geq 0$, rješenje je dano formulom (22).

Ako je $a = \text{const.}$, imamo

$$a\, L = \int_0^l \eta f(\eta)\, d\eta; \tag{27}$$

to je ukupni moment vanjske sile u odnosu prema polu $x = 0$.

§ 6. Slučaj $b \neq 0$

Ako je $b \neq 0$, rješenje rubnog problema

$$-(au')' + b\,u = f \tag{1}$$

$$a\,u'(0) - \beta\,u(0) = 0 \tag{2}$$

$$\gamma\,u'(l) + \delta\,u(l) = 0 \tag{3}$$

općenito se ne može napisati u *zatvorenom* obliku (poput onoga u slučaju $b = 0$). Najprije ćemo dokazati *jedinstvenost* rješenja tog problema.

6.1. Teorem

Ako je $b \neq 0$*, *rubni problem* (1)—(3) *ima najviše jedno rješenje.*

Dokaz. Neka su u_1 i u_2 rješenja problema i neka je $u = u_1 - u_2$. Zbog linearnosti problema funkcija u zadovoljava uvjete

* Pretpostavljamo, naravno, da je $b(x) \geq 0$ za svako x.

$$(au')' - bu = 0, \tag{4}$$

$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = 0, \tag{5}$$

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = 0. \tag{6}$$

Pomnožimo li jednadžbu (4) sa u i integriramo od 0 do l, dobivamo

$$-\int_0^l (au')'\, u\, \mathrm{d}x + \int_0^l bu^2\, \mathrm{d}x = 0. \tag{7}$$

Prema formuli parcijalne integracije vrijedi

$$\int_0^l (au')'\, u\, \mathrm{d}x = \int_0^l (au'\, u)'\, \mathrm{d}x - \int_0^l au'\, u'\, dx = a(l)\, u'(l)\, u(l) - \tag{8}$$
$$- a(0)\, u'(0)\, u(0) - \int_0^l a\,(u')^2\, \mathrm{d}x.$$

Iz (7) i (8) slijedi

$$\int_0^l (a\,(u')^2 + bu^2)\, \mathrm{d}x + a(0)\, u'(0)\, u(0) - a(l)\, u'(l)\, u(l) = 0. \tag{9}$$

Razlikujemo četiri slučaja:

(*i*) $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Izračunamo li $u(0)$ iz (5) i $u'(l)$ iz (6) i uvrstimo u (9), dobivamo

$$\int_0^l (a\,(u')^2 + bu^2)\, \mathrm{d}x + \frac{\alpha}{\beta}\, a(0)\, (u'(0))^2 + \frac{\delta}{\gamma}\, a(l)\, u^2(l) = 0. \tag{10}$$

Svi sumandi u (10) su nenegativni pa je svaki od njih jednak nuli:

$$\int_0^l a\,(u')^2\, \mathrm{d}x = 0, \tag{11}$$

$$\int_0^l bu^2\, \mathrm{d}x = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} a(0)\, (u(0))^2 = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\delta}{\gamma} a(l) u^2(l) = 0. \tag{14}$$

Zbog $a(x) > 0$ iz (11) slijedi $u' = 0$, to jest

$$u = const. \tag{15}$$

Iz (5) i (15) slijedi $u(0) = 0$, a zatim iz (15) $u = 0$ tj. $u_1 = u_2$.

Slučajevi (*ii*) $\beta > 0$, $\delta > 0$ i (*iii*) $\alpha > 0$, $\delta > 0$ analiziraju se analogno.

(*iv*) $\beta = \delta = 0$. Tada je $u'(0) = u'(l) = 0$. Iz (9) slijedi (11) i (12); iz (11) slijedi (15), a iz (12) slijedi

$$u^2 \int_0^l b \, dx = 0. \tag{16}$$

Kako je po pretpostavci $b(x) \geq 0$ i $b \neq 0$, b je pozitivno bar na nekom intervalu pa je

$$\int_0^l b \, dx > 0. \tag{17}$$

Iz (16) i (17) slijedi $u = 0$, tj. $u_1 = u_2$.

U gornjem dokazu u slučajevima (*i*)—(*iii*) nismo se koristili pretpostavkom $b \neq 0$. Ti dokazi, dakle, vrijede i za slučaj $b = 0$ (§ 5). Pretpostavka $b \neq 0$ igra, međutim, odlučnu ulogu u slučaju (*iv*); prema § 5. znamo da za $b = 0$ jedinstvenost ne vrijedi.

§ 7. Svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije

Kao što smo vidjeli u § 6, za jedinstvenost rješenja problema (6.1)—(6.3) važna je pretpostavka $b(x) \geq 0$. S druge strane može se očekivati da će se (uz izuzetak rubnih uvjeta $u'(0) = u'(l) = 0$) jedinstvenost sačuvati i za negativno, ali po apsolutnoj vrijednosti ne preveliko b. To očekivanje podupire činjenica da o jedinstvenosti odlučuje nenegativnost izraza na lijevoj strani u jednakosti (6.9); izraz će ostati nenegativan ako b postane malo negativno.

Najjednostavniji slučaj u kojem se može pojaviti negativno b jest problem ravnoteže žice u sustavu koji jednoliko rotira oko osi x kutnom brzinom $\Omega > 0$. Tada na žicu djeluje dodatna linijska sila gustoće

$$\Omega^2 \varrho(x) u(x) \tag{1}$$

(*centrifugalna sila*). Tako ukupna vanjska linijska sila ima gustoću

$$f(x) - b(x) u(x), \tag{2}$$

gdje je

$$b(x) = b_0(x) - \Omega^2 \varrho(x), \tag{3}$$

a $b_0(x) \geq 0$ dolazi od vanjskoga elastičnog sredstva. Tako za veliko Ω dobivamo negativno $b(x)$.

7.1. Primjer

Homogena žica napeta je kontaktnim silama (tj. a = const.) i učvršćena na krajevima u sustavu koji jednoliko rotira oko osi x kutnom brzinom Ω. Treba odrediti *kritičnu vrijednost* te brzinc, to jest onu vrijednost pri kojoj osim *nedeformiranog* ravnotežnog položaja u = 0 postoji i *deformirani* ravnotežni položaj u ≠ 0. (Tada kažemo da je nedeformirani položaj *nestabilan.*)

Neka je

$$\lambda = \varrho\, \Omega^2 / a. \tag{4}$$

Jednadžba ravnoteže u rotirajućem sustavu glasi

$$u'' + \lambda u = 0; \tag{5}$$

rubni uvjeti su

$$u(0) = u(l) = 0. \tag{6}$$

Vrijednost parametra λ za koje rubni problem (5), (6) ima *netrivijalno* rješenje u ≠ 0 zove se **svojstvena vrijednost;** odgovarajuće rješenje zove se **svojstvena funkcija**. Nas zanima najmanja pozitivna svojstvena vrijednost λ_1; ona određuje kritičnu kutnu brzinu $\Omega_1 = (\lambda_1 a/\varrho)^{1/2}$. Neka je λ svojstvena vrijednost i u odgovarajuća svojstvena funkcija; tada je

$$u(x) = A \cos \sqrt{\lambda \varrho}\, x + B \sin \sqrt{\lambda \varrho}\, x, \tag{7}$$

gdje su A i B konstante. Iz uvjeta $u(0) = 0$ slijedi $A = 0$; iz uvjeta $u(l) = 0$ dobivamo

$$B \sin \sqrt{\lambda \varrho}\, l = 0, \tag{8}$$

ili (zbog $u \neq 0$)

$$\sin \sqrt{\lambda \varrho}\, l = 0. \tag{9}$$

Iz toga slijedi

$$\sqrt{\lambda \varrho}\, l = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

ili

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{\varrho\, l^2}. \tag{11}$$

Vrijednost λ koja odgovara broju n označimo sa λ_n:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\varrho\, l^2}. \tag{12}$$

Odgovarajuća funkcija (8) je

$$u_n(x) = B_n \sin \frac{n \pi x}{l}, \tag{13}$$

gdje je $B_n = const.$ Lako se provjerava da je (12) odnosno (13) zaista svojstvena vrijednost odnosno svojstvena funkcija problema (6). Najmanja svojstvena vrijednost je

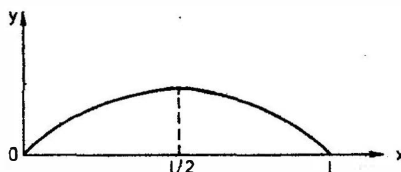
$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{\varrho\, l^2}; \tag{14}$$

odgovarajuća kutna brzina je

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{a}{\varrho}}, \tag{15}$$

a odgovarajući deformirani ravnotežni položaj (sl. 1)

$$u_1(x) = B_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \tag{16}$$



Slika 1.

Proizvoljnost konstante B_1 značila bi da se pri kritičnoj kutnoj brzini žica kida. Opažanje, međutim, pokazuje da se pri toj brzini postiže samo relativno velik progib. Taj progib se može proračunati iz realističnije nelinearne teorije koja vrijedi za veliku deformaciju.

Činjenica da poslije prekoračenja kritične kutne brzine rješenje postaje opet jedinstveno nije važna, jer nelinearna teorija promatrane pojave pokazuje da je odgovarajući ravnotežni položaj $u = 0$ labilan; to znači da je ravnotežu nemoguće zadržati.

Općenito će problem ravnoteže u rotirajućem sustavu biti opisan jednadžbom

$$-(a(x)\, u'(x))' + b_0(x)\, u(x) - \lambda\, \varrho(x)\, u(x) = f(x) \tag{17}$$

rubnim uvjetima

$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = 0, \tag{18}$$

$$\gamma\, u'(1) + \delta\, u(l) = 0. \tag{19}$$

O jedinstvenosti rješenja problema (17)—(19) odlučuje homogena jednadžba

$$-(au')' + b_0 u - \lambda\, \varrho\, u = 0, \tag{20}$$

uz rubne uvjete (18)—(19). Naime, *ako homogeni problem* (18)—(20) *ima samo trivijalno rješenje* $u = 0$, *onda nehomogeni problem* (17)—(19) *ima najviše jedno rješenje*; *ako homogeni problem ima netrivijalno rješenje* $u_0 \neq 0$ *i ako nehomogeni problem ima rješenje* u_1, *onda je i funkcija* $u_0 + u_1$ *rješenje nehomogenog problema.*

U daljnjem konstantu λ smatramo *parametrom.* Vrijednost λ za koju homogeni problem ima netrivijalno rješenje zove se **svojstvena vrijednost problema;** odgovarajuće rješenje zove se **svojstvena funkcija**. Zbog linearnosti problema *svojstvena funkcija je određena do na konstantan faktor.* Za vrijednosti λ koje nisu svojstvene kažemo da su **regularne**. *Ako je* λ *regularno, onda rubni problem* (17)—(19) *ima najviše jedno rješenje.*

Prema našim zaključcima u § 6. *svako* $\lambda < 0$ *je regularno. Ako je* $b = 0$ *i* $\beta = \delta = 0$, *onda je* $\lambda = 0$ *svojstvena vrijednost, a odgovarajuće svojstvene funkcije su konstante. Ako je bar jedan od rubnih uvjeta Dirichletov, vrijednost* $\lambda = 0$ *je regularna.*

Svojstvene vrijednosti imaju važnu interpretaciju u vezi s *titranjima*, o čemu će biti govora kasnije. U vezi s jednadžbom ravnoteže svojstvene vrijednosti se pojavljuju u *problemu stabilnosti.* U svakom slučaju posebno je važna najmanja pozitivna svojstvena vrijednost λ_1; ako takva postoji, sve vrijednosti $0 < \lambda < \lambda_1$ su očigledno regularne.

7.2. Zadaci

7.2.1. Riješite problem svojstvenih vrijednosti

$$u'' + \lambda\, u = 0,\; u(0) = u'(l) = 0. \tag{21}$$

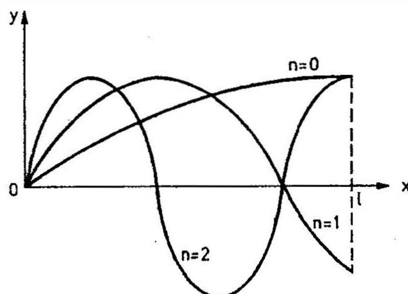
Rješenje. Opće rješenje jednadžbe je

$$u(x) = A \cos \sqrt{\lambda}\, x + B \sin \sqrt{\lambda}\, x. \tag{22}$$

Rubni uvjeti daju $A = 0$ i

$$\cos \sqrt{\lambda}\, l = 0; \tag{23}$$

iz toga dobivamo (sl. 2)



Slika 2.

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\, l^2}, \tag{24}$$

$$u_n(x) = B_n \sin \frac{(2n+1)\, \pi x}{2\, l}. \tag{25}$$

7.2.2. Dokažite formulu koja povezuje svojstvenu vrijednost λ i svojstvenu funkciju u problema (18)—(20), $\alpha = \delta = 0$:

$$\lambda = \frac{\int_0^l (a\,(u')^2 + bu^2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho\, u^2\, \mathrm{d}x}. \tag{26}$$

Rješenje. Pomnožimo jednadžbu (4) sa u i integriramo od 0 do l, a zatim prvi član na lijevoj strani parcijalno integriramo uzimajući u obzir rubne uvjete.

7.2.3. Neka je $\alpha = \delta = 0$, $a_1 = \min a$, $b_1 = \min b$, $\varrho_1 = \max \varrho$. Dokažite da su sve vrijednosti

$$\lambda < \frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{2a_1}{l^2} + b_1\right) \tag{27}$$

regularne.

Rješenje. Iz formule (26) slijedi

$$\lambda_1 \geq \frac{a_1 \int_0^l (u_1')^2\, \mathrm{d}x + b_1 \int_0^l u_1^2\, \mathrm{d}x}{\varrho_1 \int_0^l u_1^2\, \mathrm{d}x}. \tag{28}$$

Iz jednakosti

$$u_1(x) = \int_0^x u_1'(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{29}$$

dobivamo (koristeći se *Cauchyjevom nejednakosti*):

$$(u_1(x))^2 = \left(\int_0^x u_1'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)^2 \leq \int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^x (u_1'(\xi))^2\,\mathrm{d}\xi = x\int_0^x (u_1'(\xi))^2\,\mathrm{d}\xi \leq$$

$$\leq x\int_0^l (u_1'(\xi))^2\,\mathrm{d}\xi, \tag{30}$$

$$\int_0^l (u_1(x))^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{l^2}{2}\int_0^l (u_1'(x))^2\,\mathrm{d}x, \tag{31}$$

ili

$$\int_0^l (u_1'(x))^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{2}{l^2}\int_0^l u_1^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{32}$$

Iz (28) i (32) slijedi

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{2a_1}{l^2} + b_1\right). \tag{33}$$

§ 8. Koncentrirano djelovanje

Do sada smo vanjsku silu na žicu opisivali gustoćom f, tako da je ukupna vanjska sila na luk $\widehat{P(x_1)P}(x_2)$ bila jednaka

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Stavimo li

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \text{ tj. } f(x) = F'(x), \tag{2}$$

ukupnu vanjsku linijsku silu na luk $\widehat{P(x_1)P}(x_2)$ možemo izraziti kao

$$F(x_2) - F(x_1). \tag{3}$$

Pokazat ćemo da je formula (3) općenitija nego (1), i to na važnom primjeru koncentrirane sile, koja nema gustoću.

Kažemo da funkcija F opisuje silu (djelovanje) intenziteta $F_0 \neq 0$ *koncentriranu* u točki $x_0 \in (0, l)$ ako je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < x_0 \\ F_0 & \text{za } x \geq x_0. \end{cases} \tag{4}$$

Prema (3) ukupna sila na žicu jednaka je

$$F(1) - F(0) = F_0. \tag{5}$$

S druge strane, uzmemo li bilo koji interval (x_1, x_2) takav da je udaljenost točke x_0 od (x_1, x_2) veća od nule, dobivamo

$$F(x_2) - F(x_1) = 0. \tag{6}$$

Time se opravdava naziv »*koncentrirana*« sila. Pokažimo da *ta sila nema gustoću.* Zaista, $f(x)$ postoji svuda osim za $x = x_0$ te vrijedi

$$f(x) = 0, \quad x \neq x_0; \tag{7}$$

pretpostavimo li sad $f(x) = F'(x)$, moralo bi biti

$$F_0 = \int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

što je protuslovlje, jer integral funkcije koja iščezava svuda osim u jednoj točki jednak je nuli. Dakle, pretpostavljena funkcija f (gustoća) ne postoji.

Primijenimo princip ravnoteže sile na komad $\widehat{P(x_1)P(x_2)}$ $(x_1 < x_2)$ uzimajući u obzir da na taj komad osim kontaktne i vanjske elastične sile djeluje i linijska sila (3). Dobivamo:

$$q(x_2) - q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} bu\mathrm{d}x + F(x_2) - F(x_1) = 0. \tag{9}$$

Zbog (4) iz toga slijedi

$$q(x_2) - q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} bu\mathrm{d}x = 0 \text{ za } x_1, x_2 < x_0 \text{ i za } x_1, x_2 > x_0, \tag{10}$$

$$q(x_2) - q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} bu\mathrm{d}x + F_0 = 0 \text{ za } x_1 < x_0 < x_2. \tag{11}$$

Derivirajući (10) po x_2 i stavljajući $x_2 = x$, dobivamo

$$q'(x) - b(x)\,u(x) = 0 \text{ za } x < x_0 \text{ i za } x > x_0. \tag{12}$$

Iz toga i zakona ponašanja $q = au'$ slijedi

$$(a(x)\,u'(x))' - b(x)\,u(x) = 0 \text{ za } x < x_0 \text{ i za } x > x_0. \tag{13}$$

Diferencijalna jednadžba (13) *vrijedi, dakle, za* $x \neq x_0$. *U točki* x_0 *progib je neprekidan*:

$$u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0). \tag{14}$$

Uzmemo li u (11) limes kad $x_1, x_2, \to x_0$, dobivamo

$$q(x_0 - 0) - q(x_0 + 0) = F_0 \tag{15}$$

ili

$$u'(x_0 - 0) - u'(x_0 + 0) = \frac{F_0}{a(x_0)}. \tag{16}$$

Vidimo da *u točki koncentracije vanjskoga linijskog djelovanja derivacija ravnotežnog stanja* (*progiba*) *ima skok* (*prekid* 1. *vrste*). Prema tome, *u slučaju koncentriranog djelovanja za ravnotežno stanje vrijede jednadžbe* (13), (14) i (16). Odgovarajući rubni problem uključuje i rubne uvjete (2.6), (2.7).

8.1. Primjer

Neka je $a = 1$, $b = 0$. Odredimo ravnotežno stanje ako je vanjska sila F_0 koncentrirana u točki $x_0 \in (0, l)$ i ako je lijevi kraj žice učvršćen, a desni slobodan. Imamo ove uvjete:

$$u''(x) = 0, \; x < x_0 \tag{17}$$

$$u(0) = 0 \tag{18}$$

$$u''(x) = 0, x > x_0 \tag{19}$$

$$u'(l) = 0 \tag{20}$$

$$u(x_0 - 0) - u(x_0 + 0) = 0 \tag{21}$$

$$u'(x_0 - 0) - u'(x_0 + 0) = 1. \tag{22}$$

Iz (17) i (18) dobivamo

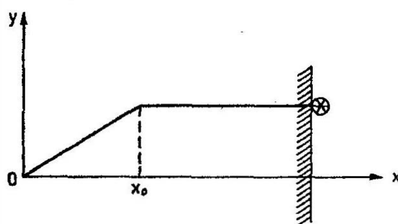
$$u(x) = Ax, x < x_0, \tag{23}$$

$$u(x) = B, x > x_0, \tag{24}$$

gdje su A i B konstante. Iz (21) i (22) dobivamo $A = 1$, $B = x_0$.

Prema tome je (sl. 1)

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq x_0 \\ x_0, & x_0 \leq x < l. \end{cases} \tag{25}$$



Slika 1.

Za razliku od slučaja vanjskog djelovanja s gustoćom (klase $\mathscr{H}^0$), ravnotežno stanje pod utjecajem koncentriranog djelovanja ne može biti klase $\mathscr{H}^2(0, l)$; to se vidi iz uvjeta (16). Prirodan je zahtjev da to stanje pripada klasama $\mathscr{H}^1(0, l)$ (time se zadovoljava uvjet (14)), $\mathscr{H}^{(2)}(0, x_0)$ i $\mathscr{H}^2(x_0, l)$. Prema tome, precizna *postavka rubnog problema* u ovom slučaju glasi ovako:

Odrediti funkciju $u \in \mathscr{H}^1(0, l)$ *koja je rješenje jednadžbe* (13) *na intervalima* $(0, x_0)$ i (x_0, l) *i koja zadovoljava uvjete* (16), (2.6), (2.7).

8.2. Zadaci

8.2.1. Za slučaj koncentriranih djelovanja izrecite princip superpozicije i ispitajte jedinstvenost rješenja rubnog problema.

Rješenje. Neka su F_i sile intenziteta F_{i0} koncentrirane u točkama x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Neka je u_i rješenje problema

$$(a(x)\, u_i'(x))' - b(x)\, u_i(x) = 0, \quad x \neq x_i \tag{26}$$

$$u_i(x_i - 0) - u_i(x_i + 0) = 0 \tag{27}$$

$$u_i'(x_i - 0) - u_i'(x_i + 0) = \frac{F_{i0}}{a(x_i)} \tag{28}$$

$$\alpha\, u_i'(0) - \beta\, u_i(0) = c_i \tag{29}$$

$$\gamma\, u_i'(l) + \delta\, u_i(l) = d_i. \tag{30}$$

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ proizvoljni brojevi. Tada je

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u_i \tag{31}$$

rješenje problema

$$(a(x)\,u'(x))' - b(x)\,u(x) = 0,\ x \neq x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{32}$$

$$u(x_i - 0) - u(x_i + 0) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{33}$$

$$u'(x_i - 0) - u'(x_i + 0) = \frac{\lambda_i F_{i0}}{a(x_i)},\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{34}$$

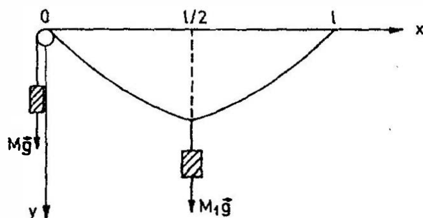
$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \tag{35}$$

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i. \tag{36}$$

Zbog gornjeg principa superpozicije ispitivanje jedinstvenosti svodi se na promatranje homogenog problema, tj. slučaja $F_i = 0$ uz homogene rubne uvjete. Prema tome, odgovor na pitanje jedinstvenosti je isti kao u slučaju djelovanja s gustoćom. Posebno, ako je $b = \beta = \delta = 0$ (uz homogene rubne uvjete), rješenje postoji onda i samo onda kad je

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i0} = 0. \tag{37}$$

8.2.2. Teška žica sastavljena je od dvaju homogenih komada jednake duljine s linijskim gustoćama mase ϱ_1 i ϱ_2 i napeta horizontalno utegom mase $M > 0$. Odredite ravnotežni progib ako je žica u sredini opterećena utegom mase $M_1 > 0$ i ako je drugi kraj učvršćen (sl. 2).



Slika 2.

Rješenje. Jednadžba ravnoteže glasi ovako:

$$u''(x) = -\frac{\varrho_1}{M},\ x < \frac{l}{2} \tag{38}$$

$$u''(x) = -\frac{\varrho_2}{M},\ x > \frac{l}{2}. \tag{39}$$

Iz toga i rubnih uvjeta $u(0) = u(l) = 0$ dobivamo

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{\varrho_1}{2M} x^2 + Cx, & x < \frac{l}{2} \\ -\frac{\varrho_2}{2M}(x^2 - l^2) + D(x - l), & x \geq \frac{l}{2}, \end{cases} \tag{40}$$

gdje su C i D konstante. Iz (14) i (16) za C i D dobivamo sustav

$$C + D = \frac{1}{4M}(\varrho_1 + 3\varrho_2) \tag{41}$$

$$C - D = \frac{M_1}{M} + \frac{1}{2M}(\varrho_1 - \varrho_2), \tag{42}$$

odakle nalazimo

$$C = \frac{M_1}{2M} + \frac{1}{8M}(3\varrho_1 + \varrho_2), \tag{43}$$

$$D = -\frac{M_1}{2M} + \frac{1}{8M}(-\varrho_1 + 5\varrho_2). \tag{44}$$

§ 9. Greenova funkcija

Ovdje ćemo pretpostavljati da homogeni problem

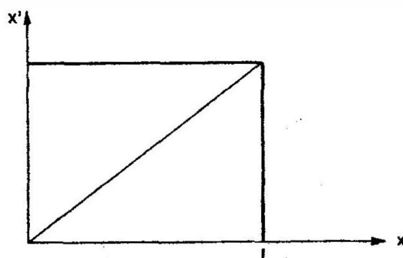
$$(au')' - bu = 0 \tag{1}$$

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = 0 \tag{2}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = 0 \tag{3}$$

ima samo trivijalno rješenje $u = 0$ (pretpostavlja se da je $b(x) \geq 0$). Prema § 5 i § 6 to je ekvivalentno pretpostavci da je

$$\text{ili } b \neq 0 \text{ ili } \beta + \delta > 0. \tag{4}$$



Slika 1.

Razmatrat ćemo slučaj kad na žicu djeluje vanjska jedinična sila koncentrirana u točki $x' \in (0, l)$. Ravnotežni progib koji zadovoljava rubne uvjete (2) i (3) označit ćemo sa $G(x, x')$. Ako ovdje i x' smatramo promjenljivim, dobivamo funkciju dviju varijabli definiranu za sve $x, x' \in (0, l)$ (sl. 1). Tako definirana funkcija G zove se **Greenova funkcija** rubnog problema (1.30), (2.6), (2.7); prema § 8 *ona je rješenje sljedećeg problema:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x}G(x, x')\right) - b(x)\,G(x, x') = 0,\ 0 < x < x' < l \tag{5}$$

$$\alpha\frac{\partial}{\partial x}G(0, x') - \beta\,G(0, x') = 0,\ x' \in (0, l) \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x}G(x, x')\right) - b(x)\,G(x, x') = 0,\ 0 < x' < x < l \tag{7}$$

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x}G(l, x') + \delta\,G(l, x') = 0,\ x' \in (0, l) \tag{8}$$

$$G(x' - 0, x') - G(x' + 0, x') = 0,\ x' \in (0, l) \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}G(x, x')\right)_{x=x'-0} - \left(\frac{\partial}{\partial x}G(x, x')\right)_{x=x'+0} = \frac{1}{a(x')},\ x' \in (0, l). \tag{10}$$

9.1. Primjer

Odredimo Greenovu funkciju u jednostavnom slučaju $a = 1$, $b = 0$, kad je lijevi kraj žice učvršćen, a desni slobodan. Prema 8.1 imamo

$$G(x, x') = \begin{cases} x, & x \leq x' \\ x', & x \geq x'. \end{cases} \tag{11}$$

Kraće možemo pisati

$$G(x, x') = \min(x, x'), \tag{12}$$

odakle slijedi da je funkcija G *simetrična*:

$$G(x, x') = G(x', x). \tag{13}$$

Prema tome *progib u točki x izazvan jediničnom silom u točki x' jednak je progibu u točki x' izazvanom jediničnom silom u točki x.* Iz (12) slijedi da je funkcija G *pozitivna:*

$$G(x, x') > 0 \text{ za sve } x, x' \in (0, l). \tag{14}$$

To svojstvo ima jednostavnu interpretaciju: *progib prouzročen koncentriranom silom ima smjer te sile.* Svojstva (13) i (14) Greenova funkcija ima i u *općem slučaju.*

9.2. Zadatak

Neka je $a = const.$, $b = const.$ Odredite Greenovu funkciju ako su oba kraja učvršćena. Provjerite simetričnost i pozitivnost.

Rješenje. Stavljajući $k = (b/a)^{1/2}$, iz (5) i (6) odnosno (7) i (8) dobivamo za $b > 0$

$$G(x, x') = B \operatorname{sh} k x, \quad x < x', \tag{15}$$

$$G(x, x') = C(\operatorname{ch} kx - \operatorname{cth} kl \operatorname{sh} kx), \quad x' < x, \tag{16}$$

gdje su B i C konstante koje mogu ovisiti o x'. Sad iz (9) i (10) slijedi

$$B \operatorname{sh} kx' - C(\operatorname{ch} k x' - \operatorname{cth} kl \operatorname{sh} kx') = 0, \tag{17}$$

$$B \operatorname{ch} kx' - C(\operatorname{sh} kx' - \operatorname{cth} kl \operatorname{ch} k x') = \frac{1}{ak}. \tag{18}$$

Iz toga dobivamo

$$B = \frac{1}{ak}(\operatorname{ch} kx' - \operatorname{cth} kl \operatorname{sh} kx'), \tag{19}$$

$$C = \frac{1}{ak} \operatorname{sh} kx', \tag{20}$$

pa je

$$G(x, x') = \begin{cases} \dfrac{1}{ak}(\operatorname{ch} kx' - \operatorname{cth} kl \operatorname{sh} kx') \operatorname{sh} kx, & x \leq x' \\ \dfrac{1}{ak}(\operatorname{ch} kx - \operatorname{cth} kl \operatorname{sh} kx) \operatorname{sh} kx', & x' \leq x. \end{cases} \tag{21}$$

Simetrija je očita iz (21). Dalje imamo

$$\operatorname{ch} kx' - \operatorname{cth} kl \operatorname{sh} kx' = \frac{1}{\operatorname{sh} kl}(\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kx' - \operatorname{ch} kl \operatorname{sh} kx') = \frac{\operatorname{sh} k(l - x')}{\operatorname{sh} kl} > 0, \tag{22}$$

pa je stoga $G(x, x') > 0$ za $0 < x \leq x' < l$. Za $0 < x' \leq x < l$ pozitivnost se provjerava analogno. Za $b = 0$ dobivamo

$$G(x, x') = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{x'}{l}\right) x, & x \leq x' \\ \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{x}{l}\right) x', & x' \leq x. \end{cases} \tag{23}$$

Simetričnost i pozitivnost je očita.

Prelazimo *na konstrukciju Greenove funkcije u općem slučaju.* Prema § 8. precizna **postavka problema** (5)—(10) glasi ovako:

Odrediti funkciju $G(x, x')$ *varijabli* $x, x' \in (0, l)$ s ovim svojstvima:

(*i*) *za svako fiksirano* x' *funkcija* $G(x, x')$ *pripada klasi* $\mathscr{H}^1(0, l)$;

(*ii*) *za svako fiksirano* x' *funkcija* $G(x, x')$ *je rješenje jednadžbe* (1) *na segmentima* $[0, x']$ i $[x', l]$;

(*iii*) *funkcija* $G(x, x')$ *zadovoljava uvjete* (6), (8) *i* (10).

Pokazat ćemo da tako postavljen problem ima rješenje (koje je prema zadatku 8.2.1 jedinstveno).

Neka su u_1 i u_2 linearno nezavisna rješenja jednadžbe (1) na segmentu $[0, l]$; tada svako rješenje ima oblik

$$u = A_1 u_1 + A_2 u_2, \tag{24}$$

gdje su A_1 i A_2 konstante (v. Dodatak, § 2). Odredimo sva rješenja koja zadovoljavaju uvjet (2). Uvrstimo li (24) u (2), dobivamo

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0, \tag{25}$$

gdje je

$$a_1 = \alpha u_1'(0) - \beta u_1(0), a_2 = \alpha u_2'(0) - \beta u_2(0). \tag{26}$$

Bar jedan od brojeva (26) je različit od nule, jer bi iz uvjeta $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ i pretpostavke $\alpha + \beta > 0$ slijedilo

$$\begin{vmatrix} u_1'(0) & u_1(0) \\ u_2'(0) & u_2(0) \end{vmatrix} = W(u_1, u_2, 0) = 0, \tag{27}$$

a to zbog linearne nezavisnosti funkcija u_1 i u_2 nije moguće (v. Dodatak, § 2).

Ako je $a_1 \neq 0$, onda je

$$A_1 = -\frac{a_2}{a_1} A_2, \tag{28}$$

$$u = A_2 \left(-\frac{a_2}{a_1} u_1 + u_2\right), \tag{29}$$

pri čemu je (zbog linearne nezavisnosti u_1 i u_2)

$$-\frac{a_2}{a_1} u_1 + u_2 \neq 0. \tag{30}$$

Ako je $a_2 \neq 0$, onda je

$$A_2 = -\frac{a_1}{a_2} A_1, \tag{31}$$

$$u = A_1 \left(u_1 - \frac{a_1}{a_2} u_2 \right), \tag{32}$$

pri čemu je

$$u_1 - \frac{a_1}{a_2} u_2 \neq 0. \tag{33}$$

Prema (29) odnosno (32) svako rješenje koje zadovoljava uvjet (2) ima oblik

$$u = C\, v, \tag{34}$$

gdje je v jedno fiksirano netrivijalno rješenje koje zadovoljava uvjet (2), a C konstanta. Analogno zaključujemo da svako rješenje koje zadovoljava uvjet (3) ima oblik

$$u = D\, w, \tag{35}$$

gdje je w jedno fiksirano netrivijalno rješenje koje zadovoljava uvjet (3), a D konstanta.

Uzimajući u obzir gornje zaključke vidimo da Greenova funkcija, nužno ima oblik

$$G(x, x') = \begin{cases} C\, v(x), & 0 < x \leq x' < l \\ D\, w(x), & 0 < x' \leq x < l, \end{cases} \tag{36}$$

pri čemu koeficijenti C i D ovise o x'. Uvrštavajući (36) u (9) i (10), za te koeficijente dobivamo sustav

$$C\, v(x') - D\, w(x') = 0 \tag{37}$$

$$C\, v'(x') - D\, w'(x') = \frac{1}{a(x')}. \tag{38}$$

Determinanta tog sustava $W(x') = W(v, w, x')$ je različita od nule za svako x'. Zaista, kad bi W negdje iščezavalo, funkcije v i w bile bi linearno zavisne pa bi obje zadovoljavale i uvjet (2) i uvjet (3); zbog (4) iz toga bi slijedilo $v = w = 0$, što je protivno pretpostavci. Rješenje sustava (37), (38) je

$$C = -\frac{w(x')}{a(x')\, W(x')} = -\frac{w(x')}{a(0)\, W(0)}, \tag{39}$$

$$D = -\frac{v(x')}{a(x')\,W(x')} = -\frac{v(x')}{a(0)\,W(0)}\,; \tag{40}$$

ovdje smo iskoristili Liouvilleovu formulu (v. Dodatak, § 2). Svaka od funkcija v i w je određena do na konstantan faktor; te faktore uvijek možemo odabrati tako da bude

$$a(0)\,W(0) = -1. \tag{41}$$

Uz takav izbor dobivamo

$$G(x, x') = \begin{cases} v(x)\,w(x'), & 0 < x \leq x' < l \\ v(x')\,w(x), & 0 < x' \leq x < l. \end{cases} \tag{42}$$

Sad se lako provjerava da funkcija (42) zadovoljava sve uvjete koji se zahtijevaju od Greenove funkcije. Imamo, dakle, ovaj teorem:

9.3. Teorem

Greenova funkcija rubnog problema (1.30), (2.6), (2.7) *dana je formulom* (42), *gdje su v i w netrivijalna rješenja problema* (1), (2) *odnosno* (1), (3) *koja zadovoljavaju uvjet* (41).

9.4. Posljedice

(*i*) *Greenova funkcija je simetrična, tj. vrijedi* $G(x, x') = G(x', x)$. (*ii*) *Greenova funkcija je neprekidna na zatvorenom kvadratu* $[0, l] \times [0, l]$. (*iii*) *Greenova funkcija se ne poništava na kvadratu* $(0, l) \times (0, l)$.

Dokaz. Tvrdnje (*i*) i (*ii*) su očigledne. Dokažimo (*iii*). Pretpostavimo da je $G(x_1, x_1') = 0$ za neko $x_1, x_1' \in (0, l)$; neka je na primjer, $x_1 \leq x_1'$. Iz (42) slijedi $v(x_1)\,w(x_1') = 0$, pa je ili $v(x_1) = 0$ ili $w(x_1') = 0$. Neka je, na primjer,

$$v(x_1) = 0. \tag{43}$$

Tada je v rješenje homogenog problema (1), (2), (43), pa je $v(x) = 0$ za sve $x \in [0, x_1]$. Zbog toga je i $W(x) = 0$ za sve $x \in [0, x_1]$, a to protuslovi svojstvu Wronskijana linearno nezavisnih rješenja (v. Dodatak, § 2).

§ 10. Rješenje rubnog problema pomoću Greenove funkcije

I ovdje pretpostavljamo uvjet (9.4).

Greenovu funkciju pridružili smo rubnom problemu

$$-(au')' + bu = f \tag{1}$$

$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = 0 \tag{2}$$

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = 0, \tag{3}$$

iako znamo (§ 8) da se ona ne može dobiti kao rješenje tog problema ni za jedno f. Razlog zašto smo to ipak učinili jest činjenica da Greenova funkcija omogućuje jednostavnu formulu za rješenje rubnog problema za bilo koje f.

Podijelivši interval $(0, l)$ na male intervale oko točaka x_i širine Δ, očekujemo da silu gustoće f možemo aproksimirati zbrojem sila intenziteta

$$\int_{x_i - \frac{\Delta}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x \approx f(x_i) \cdot \Delta, \tag{4}$$

koncentriranim u točkama $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Svaka od tih sila daje rješenje

$$f(x_i) \cdot \Delta \cdot G(x, x_i), \tag{5}$$

a sve zajedno (prema principu superpozicije)

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta \cdot G(x, x_i). \tag{6}$$

Ako Δ teži nuli, gornji izraz teži integralu

$$u(x) = \int_0^l G(x, x')\, f(x')\, \mathrm{d}x'. \tag{7}$$

10.1. Teorem

Rješenje rubnog problema (1)—(3) *dano je formulom* (7).

Dokaz. Iz (7) i (9.42) slijedi

$$u(x) = w(x) \int_0^x v(x')\, f(x')\, \mathrm{d}x' + v(x) \int_x^l w(x')\, f(x')\, \mathrm{d}x', \tag{8}$$

$$u'(x) = w'(x) \int_0^x v(x')\, f(x')\, \mathrm{d}x' + v'(x) \int_x^l w(x')\, f(x')\, \mathrm{d}x'. \tag{9}$$

Neka su u točki $x \in [0, l]$ funkcije a', b i f neprekidne. Tada iz (9) dobivamo

$$(a(x)\,u'(x))' = (a(x)\,w'(x))' \int_0^x v(x')\,f(x')\,dx' + (a(x)\,v'(x))' \int_x^l w(x')\,f(x')\,dx' + a(x)\,(v(x)\,w'(x) - v'(x)\,w(x))\,f(x). \quad (10)$$

Funkcije v i w zadovoljavaju jednadžbu (9.1) pa je

$$(aw')'(x) = b(x)\,w(x), \; (av')'(x) = b(x)\,v(x). \quad (11$$

Iz uvjeta (9.41) i Liouvilleove formule (v. Dodatak, § 2) slijedi

$$a(x)\,(v(x)\,w'(x) - v'(x)\,w(x)) = a(x)\,W(x) = a(0)\,W(0) = -1. \quad (12)$$

Iz (10)—(12) dobivamo

$$(a(x)\,u'(x))' = b(x)\,w(x) \int_0^x v(x')\,f(x')\,dx' + b(x)\,v(x) \int_x^l w(x')\,f(x')\,dx' - f(x) = b(x) \int_0^l G(x, x')\,f(x')\,dx' - f(x) =$$

$$= b(x)\,u(x) - f(x). \quad (13)$$

Prema tome, funkcija (7) je rješenje jednadžbe (1) na segmentu $[0, l]$. Dalje imamo

$$au'(0) - \beta\,u(0) = \int_0^l \left(a \frac{G(0, x')}{\partial x} - \beta\,G(0, x')\right) f(x')\,dx' = 0, \quad (14)$$

$$u'(l) + \delta\,u(l) = \int_0^l \left(\gamma \frac{\partial\,G(l, x')}{\partial x} + \delta\,G(l, x')\right) f(x')\,dx' = 0, \quad (15)$$

jer Greenova funkcija zadovoljava uvjete (2) i (3).

10.2. Posljedica

Vrijedi

$$G(x, x') > 0 \quad (16)$$

za sve $x, x' \in (0, l)$.

Dokaz. Prema posljedici 9.4. funkcija G ima isti znak za sve $x, x' \in \in (0, l)$. Neka je funkcija u rješenje rubnog problema u slučaju $f(x) = = 1$. Tada je

$$u(x) = \int_0^l G(x, x')\,dx', \tag{17}$$

$$\int_0^l u(x)\,dx = \int_0^l \int_0^l G(x, x')\,dx\,dx'. \tag{18}$$

S druge strane, iz jednakosti

$$(au')' - bu + 1 = 0 \tag{19}$$

dobivamo

$$\int_0^l u\,dx = -\int_0^l (au')'\,u\,dx + \int_0^l bu^2\,dx, \tag{20}$$

ili (pretpostavljajući, na primjer, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ i uzimajući u obzir (2) i (3))

$$\int_0^l u\,dx = \int_0^l (au'^2 + bu^2)\,dx + \frac{\delta}{\gamma}\,a(l)\,u^2(l) + \frac{\alpha}{\beta}\,u'^2(0) \geq 0. \tag{21}$$

Iz (18) i (21) slijedi

$$\int_0^l \int_0^l G(x, x')\,dx'\,dx > 0. \tag{22}$$

Funkcija G ima isti znak kao integral na lijevoj strani u (22); prema tome, G je pozitivno na kvadratu $(0, l) \times (0, l)$.

Formula (7) jednostavna je i omogućuje neke opće zaključke o rješenju rubnog problema.

Ako je $f \geq 0$ i $f \neq 0$, onda je

$$u(x) = \int_0^l G(x, x') f(x')\,dx' > 0, \tag{23}$$

jer je Greenova funkcija pozitivna. Drugim riječima, ako linijska sila djeluje u jednom smjeru, taj isti smjer ima i progib; preciznije, *ako je f nenegativno i različito od nule, rješenje rubnog problema* (1)—(3) *je pozitivno.**

Drugo važno svojstvo koje slijedi iz formule (7) jest korektnost. Imamo

$$u'(x) = \int_0^l \frac{\partial G(x, x')}{\partial x} f(x')\, dx', \tag{24}$$

$$|u'(x)| \leq \int_0^l \left|\frac{\partial G(x, x')}{\partial x}\right| |f(x')|\, dx' \leq (\max_{x\in[0,l]} |f(x)|) \int_0^l \left|\frac{\partial G(x, x')}{\partial x}\right| dx', \tag{25}$$

$$|u'(x)| \leq h \max_{x\in[0,l]} |f(x)|, \tag{26}$$

gdje smo stavili

$$h = \max_{x\in[0,l]} \int_0^l \left|\frac{\partial G(x, x')}{\partial x}\right| dx'. \tag{27}$$

Dakle, ako je *f malo* (*tj.* max $|f|$ *malo*), *onda je i rješenje rubnog problema malo* (*mala deformacija*).

10.3. Zadaci

10.3.1. Dokažite da rješenje rubnog problema ovisi monotono o gustoći vanjske sile.

Rješenje. Neka je

$$-(a u_1')' + b u_1 = f_1, \tag{28}$$

$$-(a u_2')' + b u_2 = f_2, \tag{29}$$

uz iste rubne uvjete. Oduzimajući (29) od (28) dobivamo

$$-(a (u_1 - u_2)')' + b (u_1 - u_2) = f_1 - f_2. \tag{30}$$

Prema (7) iz toga slijedi

$$u_1(x) - u_2(x) = \int_0^1 G(x, x') (f_1(x') - f_2(x'))\, dx'. \tag{31}$$

---

* Taj zaključak vrijedi, naravno, uz pretpostavku (9.4) i homogene rubne uvjete.

Iz (31) zaključujemo: ako je $f_1 > f_2$, onda je $u_1 > u_2$.

10.3.2. Neka za gustoću vanjske sile f vrijedi ili $f \geq 0$ ili $f \leq 0$. Dokažite da rješenje rubnog problema ovisi monotono o koeficijentu elastičnosti sredstva.

Rješenje. Neka je

$$-(a\,u_1')' + b_1 u_1 = f, \tag{32}$$

$$-(a\,u_2')' + b_2 u_2 = f, \tag{33}$$

uz iste rubne uvjete. Oduzimajući (33) od (32) dobivamo

$$-(a\,(u_1 - u_2)')' + b_1 u_1 - b_2 u_2 = 0, \tag{34}$$

ili

$$-(a\,(u_1 - u_2)')' + b_1\,(u_1 - u_2) = (b_2 - b_1)\,u_2. \tag{35}$$

Označimo sa G_1 odnosno G_2 Greenovu funkciju jednadžbe (32) odnosno (33). Prema (7) iz (35) slijedi

$$u_1\,(x) - u_2\,(x) = \int_0^l G_1\,(x, x')\,(b_2\,(x') - b_1\,(x'))\,u_2\,(x')\,\mathrm{d}x' =$$

$$\int_0^l\int_0^l G_1\,(x, x')\,G_2\,(x', x'')\,(b_2\,(x') - b_1\,(x'))\,f\,(x'')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x''. \tag{36}$$

Iz (36) zaključujemo: ako je $b_1 \geq b_2$, onda je $u_1 \leq u_2$ za $f \geq 0$ i $u_1 \geq u_2$ za $f \leq 0$.

§ 11. Varijaciona jednadžba

Ovdje ćemo opisati rubni problem (10.1)—(10.3) na novi način. Neka je u ravnotežno stanje, to jest

$$q' - bu + f = 0,\ q = au'. \tag{1}$$

Uzmemo li kakvu god funkciju v, pomnožimo (1) sa v i integriramo, izlazi

$$\int_0^l q'v\,\mathrm{d}x + \int_0^l (-bu + f)\,v\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2}$$

Prvi član na lijevoj strani transformirajmo parcijalnom integracijom:

$$\int_0^l q'v\,\mathrm{d}x = \int_0^l (qv)'\,\mathrm{d}x - \int_0^l qv'\mathrm{d}x = q\,(l)\,v\,(l) - q\,(0)\,v\,(0) - \int_0^l qv'\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Sad iz (2) dobivamo

$$q(l)\,v(l) - q(0)\,v(0) - \int_0^l qv'\,dx + \int_0^l (-bu + f)\,v\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

Interpretiramo li funkciju v kao *smetnju* ili *perturbaciju* ravnotežnog položaja. članove na lijevoj strani u (4) možemo tumačiti kao *rad* pojedinih sila na »putu« od ravnotežnog položaja u do *perturbiranog položaja* $u + v$: prva dva člana označuju *rad vanjskih kontaktnih sila*, a zadnja dva člana *rad vanjskih linijskih sila*. Nazovemo li član

$$-\int_0^l qv'\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

radom unutrašnjih sila, jednakost (4) možemo tumačiti kao ovaj **Bernoullijev princip:**

Ukupan rad vanjskih i unutrašnjih sila na proizvoljnoj perturbaciji ravnotežnog stanja jednak je nuli.

Pretpostavimo sad da funkcija u osim jednadžbe ravnoteže zadovoljava i rubne uvjete. Budući da će se pokazati da geometrijski i prirodni uvjeti imaju bitno različite uloge, mi ćemo, da bismo osvijetlili oba slučaja, pretpostaviti da je, na primjer, na lijevom kraju dan geometrijski, a na desnom prirodni uvjet:

$$u(0) = 0, \tag{6}$$

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = 0, \ \gamma > 0. \tag{7}$$

Uvjet (7) znači da je (zbog $q = au'$)

$$q(l) = -\frac{\delta}{\gamma}\, a(l)\, u(l). \tag{8}$$

Kazat ćemo da je funkcija v **dozvoljena** *ako zadovoljava iste geometrijske uvjete kao i funkcija u*; kod nas će to značiti

$$v(0) = 0. \tag{9}$$

Uzimajući u obzir (6), (8) i (9), iz (4) zaključujemo da je zadovoljen sljedeći uvjet:

$$\int_0^l (au'v' + buv)\,\mathrm{d}x = \int_0^l fv\mathrm{d}x - \frac{\delta}{\gamma}\, a(l)\, u(l)\, v(l), \ \textit{za svako dozvoljeno } v. \tag{10}$$

Imamo ovaj zaključak:

Ako je funkcija u rješenje rubnog problema (1), (6), (7), *onda ona zadovoljava uvjet* (10).

Pokazat ćemo da (zbog proizvoljnosti funkcije v) vrijedi i obrat tog zaključka. Pretpostavimo da dozvoljena funkcija u zadovoljava uvjet (10). Prvi član na lijevoj strani transformirajmo parcijalnom integracijom:

$$\int_0^l au'v'\mathrm{d}x = \int_0^l (au'v)'\,\mathrm{d}x - \int_0^l (au')'\,v\mathrm{d}x = a\,(l)\,u'\,(l)\,v\,(l) - a\,(0)\,u'\,(0)\,v\,(0) -$$

$$- \int_0^l (au')'\,v\,\mathrm{d}x = a\,(l)\,u'\,(l)\,v\,(l) - \int_0^l (au')'\,v\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Iz (10) i (11) dobivamo

$$a\,(l)\,(u'\,(l) + \frac{\delta}{\gamma}\,u\,(l))\,v\,(l) - \int_0^l ((au')' - bu + f)\,v\mathrm{d}x = 0, \textit{ za svako dozvoljeno } v. \tag{12}$$

Posebno to vrijedi za svako dozvoljeno v koje se poništava i na desnom kraju $x = l$. Za takvo v imamo

$$\int_0^l ((au')' - bu + f)\,v\,\mathrm{d}x = 0. \tag{13}$$

Namjera nam je pokazati da se izraz u zagradi pod znakom integrala poništava. Pretpostavimo suprotno, tj. da je na nekom intervalu (x_1, x_2) taj izraz različit od nule, npr. pozitivan. Među dozvoljenim funkcijama koje se poništavaju i na kraju $x = l$ odaberimo funkciju w koja je jednaka nuli svuda osim na intervalu (x_1, x_2), gdje je pozitivna. Stavljajući u (13) $v = w$, dobivamo

$$\int_{x_1}^{x_2} ((au')' - bu + f)\,w\,\mathrm{d}x = 0. \tag{14}$$

To je kontradiktorno jer je funkcija pod znakom integrala prema pretpostavci pozitivna na cijelom intervalu integracije. Prema tome, ne vrijedi pretpostavka da je izraz $(au')' - bu + f$ negdje pozitivan; analogno se obara pretpostavka da je taj izraz negdje negativan. Funkcija u zadovoljava, dakle, jednadžbu ravnoteže. Uzimajući to u obzir, iz (12) dobivamo

$$a\,(1)\,(u'\,(1) + \frac{\delta}{\gamma}\,u\,(1))\,v\,(1) = 0, \textit{ za svako dozvoljeno } v. \tag{15}$$

Zbog proizvoljnosti v (i pretpostavke $a\,(l) > 0$) zaključujemo

$$u'\,(l) + \frac{\delta}{\gamma}\,u\,(l) = 0. \tag{16}$$

Prema tome, funkcija u zadovoljava i rubni uvjet (7). Imamo ovaj zaključak:

Ako dozvoljena funkcija u zadovoljava uvjet (10), *ona je rješenje rubnog problema* (1), (6), (7).

Uvjet (10) zove se **varijaciona jednadžba*** (ili *varijacioni rubni problem*) za funkciju u. Spajajući gornja dva zaključka dobivamo ovaj teorem:

11.1. Teorem

Rubni problem (1), (6), (7) *ekvivalentan je varijacionoj jednadžbi* (10), *to jest, vrijedi sljedeće:*

(*i*) *Ako je funkcija u rješenje rubnog problema* (1), (6), (7), *onda je ona rješenje varijacione jednadžbe* (10).

(*ii*) *Ako je dozvoljena funkcija u rješenje varijacione jednadžbe* (10), *onda je ona rješenje rubnog problema* (1), (6), (7).

Zbog tog teorema varijaciona jednadžba (10) često se zove *varijacioni oblik rubnog problema* (1), (6), (7).

Između rubnog problema (1), (6), (7) i varijacione jednadžbe (10) postoji asimetrija u pogledu glatkoće koja se zahtijeva od rješenja u. Funkcija u ulazi u rubni problem sa 2. derivacijom, a u varijacionu jednadžbu sa 1. derivacijom. Zato je prirodno tražiti rješenje varijacione jednadžbe u klasi $\mathscr{H}^1(0, l)$. Pri izvođenju zaključka (*ii*) teorema 11.1 mi smo, međutim, šutke pretpostavili da to rješenje pripada klasi $\mathscr{H}^2(0, l)$, što nam je omogućilo parcijalnu integraciju (11). Ta pretpostavka se može dokazati. Najprije precizirajmo da ćemo dozvoljenom nazivati svaku funkciju $v \in \mathscr{H}^1(0, l)$ koja zadovoljava uvjet (9). Inkluzija $u \in \mathscr{H}^2(0, l)$ za rješenje varijacione jednadžbe slijedi neposredno iz ovog *teorema regularnosti* i naših ranijih zaključaka (v. § 3).

11.2. Teorem

Ako je dozvoljena funkcija $u \in \mathscr{H}^1(0, l)$ *rješenje varijacione jednadžbe* (10), *onda ona zadovoljava integralnu jednadžbu ravnoteže* (1.28).

Dokaz. Stavimo

$$\mathcal{J}(x) = a(x)\, u'(x) - \int_0^x (b(x')\, u(x') - f(x'))\, \mathrm{d}x' + C, \tag{17}$$

gdje je C konstanta takva da vrijedi

$$\int_0^l \mathcal{J}(x)\, \mathrm{d}x = 0. \tag{18}$$

* Istaknimo da je za varijacionu jednadžbu bitan zahtjev »*za svako dozvoljeno v*«.

Neka je

$$w(x) = \int_0^x \mathcal{J}(x')\,\mathrm{d}x'. \tag{19}$$

Očito je $\mathcal{J} \in \mathscr{H}^0(0, l)$, $\mathcal{J} - au' \in \mathscr{H}^1(0, l)$, $w \in \mathscr{H}^1(0, l)$, a osim toga je zbog (18)

$$w(0) = w(l) = 0. \tag{20}$$

Vrijedi formula

$$((\mathcal{J} - au')\,w)' = (\mathcal{J} - au')'\,w + (\mathcal{J} - au')\,w', \tag{21}$$

pri čemu je (zbog (20)) integral lijeve strane po intervalu $(0, l)$ jednak nuli. Tako imamo

$$0 = \int_0^l ((\mathcal{J} - au')'\,w + (\mathcal{J} - au')\,w')\,\mathrm{d}x = -\int_0^l (bu - f)\,w\mathrm{d}x + \\ + \int_0^l \mathcal{J}^2\,\mathrm{d}x - \int_0^l au'\,w'\,\mathrm{d}x, \tag{22}$$

odnosno

$$\int_0^l \mathcal{J}^2\,\mathrm{d}x = \int_0^l (au'\,w' + buw - fw)\,\mathrm{d}x. \tag{23}$$

Budući da je w dozvoljena funkcija, u (10) smijemo staviti $v = w$, što zajedno sa (20) i (23) daje

$$\int_0^l \mathcal{J}^2\,\mathrm{d}x = 0. \tag{24}$$

To povlači $\mathcal{J} = 0$, tj.

$$a(x)\,u'(x) = \int_0^x (b(x')\,u(x') - f(x'))\,\mathrm{d}x' + C. \tag{25}$$

Veoma je važno primijetiti da se u (10) više ne zahtijeva zadovoljenje prirodnog uvjeta (7); on je samo ostavio »traga« u zadnjem članu na lijevoj strani. Prema tome varijacioni oblik rubnog problema upućuje na važnu razliku među geometrijskim i prirodnim rubnim uvjetima. Ta će razlika imati veliko značenje pri konstrukciji približnog rješenja rubnog problema.

11.3. Zadatak

Opišite varijacioni oblik problema (10.1)—(10.3) ako su
(i) oba rubna uvjeta geometrijska,
(ii) oba rubna uvjeta prirodna.

Rješenje. (i) Varijacioni oblik glasi: Odrediti dozvoljenu funkciju u tako da vrijedi

$$\int_0^l (au'v' + buv)\,\mathrm{d}x - \int_0^l fv\mathrm{d}x = 0 \textit{ za svako dozvoljeno } v. \tag{26}$$

Pri tome je skup dozvoljenih funkcija dan uvjetom $v(0) = v(l) = 0$.

(ii) Varijacioni oblik glasi: Odrediti funkciju u tako da vrijedi

$$\int_0^l (au'v' + buv)\,\mathrm{d}x - \int_0^l fv\mathrm{d}x + \frac{\beta}{\alpha} a(0)\,u(0)\,v(0) + \frac{\delta}{\gamma} a(l)\,u(l)\,v(l) = 0$$

$$\textit{za svako } v. \tag{27}$$

§ 12. Funkcional energije

Ovdje ćemo dati još jedan oblik rubnog problema*

$$-(au')' + bu = f \tag{1}$$

$$u(0) = 0 \tag{2}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = 0, \ \gamma > 0. \tag{3}$$

Pretpostavimo da funkcija w zadovoljava rubne uvjete (2) i (3), to jest

$$w(0) = 0, \tag{4}$$

$$\gamma w'(l) + \delta w(l) = 0 \tag{5}$$

i promotrimo izraz

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l ((-aw')' + bw)\,w\,\mathrm{d}x - \int_0^l fw\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

---

* Ostajemo kod konkretnih rubnih uvjeta iz § 11. Ostale kombinacije uvjeta razmatraju se analogno.

Poslije parcijalne integracije u prvom sumandu na desnoj strani dobivamo (uzimajući u obzir (4))

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l (aw'^2 + bw^2)\,dx - \frac{1}{2}a(l)\,w'(l)\,w(l) - \int_0^l fw\,dx. \tag{7}$$

Izračunamo li $w'(l)$ iz (5) i uvrstimo u (7), izlazi

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l (aw'^2 + bw^2)\,dx + \frac{\delta}{2\gamma}a(l)\,w^2(l) - \int_0^l fw\,dx. \tag{8}$$

Izraz (8) ima smisla ne samo za funkcije w koje zadovoljavaju uvjete (4) i (5), nego i za funkcije iz mnogo većeg skupa. Mi ćemo u daljnjem taj izraz promatrati za dozvoljene funkcije w, tj. one koje zadovoljavaju uvjet (4). Svakoj dozvoljenoj funkciji w pridružen je po formuli (8) broj $\Phi(w)$. Preslikavanje koje svakoj funkciji iz nekog skupa pridružuje broj zove se **funkcional**. Mi, dakle, promatramo funkcional Φ na skupu dozvoljenih funkcija. Članovi na desnoj strani u (8) imaju redom ove nazive: *energija deformacije* (u »stanju« w), *energija elastične linijske sile*, *energija vanjske kontaktne elastične sile i energija vanjske linijske sile*. Stoga Φ zovemo **funkcional energije**.

Neka je u rješenje problema (1)—(3). Funkcional energije odlikuje se time što svoju najmanju vrijednost (na skupu dozvoljenih funkcija) postiže upravo za $w = u$. Preciznije o tome govori ovaj teorem, koji je zapravo **princip minimuma potencijalne energije**.

12.1. Teorem

Problem (1)—(3) *ekvivalentan je minimizaciji funkcionala* (8) *na skupu dozvoljenih funkcija, tj. vrijedi sljedeće*:

(*i*) *Ako je neka funkcija rješenje problema* (1)—(3), *onda ona minimizira funkcional Φ na skupu dozvoljenih funkcija* (*funkcional na njoj postiže svoju najmanju vrijednost*).

(*ii*) *Ako neka funkcija minimizira funkcional Φ na skupu dozvoljenih funkcija, onda je ona rješenje problema* (1)—(3).

Dokaz. (*i*) Neka je u rješenje problema (1)—(3), a w bilo koja dozvoljena funkcija. Tada je $v = w - u$ također dozvoljena funkcija. Uvrstimo li $w = v + u$ u (8), dobivamo

$$\Phi(w) = \Phi(u + v) = \Phi(u) + \int_0^l (au'v' + buv - fv)\,dx + \frac{\delta}{\gamma}a(l)\,u(l)\,v(l) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^l (av'^2 + bv^2)\,dx + \frac{\delta}{2\gamma}a(l)\,v^2(l) = \Phi(u) + \frac{1}{2}\int_0^l (av'^2 + bv^2)\,dx +$$

$$+ \frac{\delta}{2\gamma} a(l)\, v^2(l), \tag{9}$$

gdje smo uzeli u obzir da prema teoremu 11.1 funkcija u zadovoljava varijacionu jednadžbu (11.10) Kako su dva posljednja člana na desnoj strani nenegativna, zaključujemo

$$\Phi(u) \leq \Phi(w). \tag{10}$$

(*ii*) Neka funkcija w minimizira funkcional Φ na skupu dozvoljenih funkcija. Uzimajući u obzir zaključak (*i*), imamo

$$\Phi(w) = \Phi(u) \tag{11}$$

(gdje je u rješenje problema (1)—(3)). Stavljajući $v = w - u$ i uvrštavajući $w = v + u$ u (11), dobivamo

$$\int_0^l (av'^2 + bv^2)\, dx + \frac{\delta}{\gamma} a(l)\, v^2(l) = 0 \tag{12}$$

ili, zbog nenegativnosti pojedinih sumanada

$$\int_0^l av'^2\, dx = \int_0^l bv^2\, dx = v(l) = 0. \tag{13}$$

Iz toga slijedi $v = 0$, tj. $w = u$.

Ovdje ćemo rezimirati dosadašnje rezultate o raznim oblicima ili formulacijama ravnotežnoga rubnog problema. Te formulacije su sljedeće:

a) **Integralna formulacija.** *Odrediti funkciju u* koja zadovoljava jednakost*

$$a(x)\, u'(x) - a(0)\, u'(0) - \int_0^x b(\xi)\, u(\xi)\, d\xi + \int_0^x f(\xi)\, d\xi = 0 \tag{14}$$

za svako $x \in [0, l]$ i rubne uvjete na krajevima.

b) **Diferencijalna formulacija.** *Odrediti funkciju u** koja zadovoljava jednadžbu ravnoteže i rubne uvjete na krajevima.*

c) **Varijaciona formulacija.** *Odrediti dozvoljenu funkciju koja zadovoljava varijacionu jednadžbu.*

---

* Ovdje se pretpostavlja $u \in \mathscr{H}^1(0, l)$.

** Ovdje se pretpostavlja $u \in \mathscr{H}^2(0, l)$.

d) **Energetska formulacija.** *Odrediti funkciju koja minimizira funkcional energije na skupu dozvoljenih funkcija.*

Kao što smo vidjeli, *formulacije a)—d) su ekvivalentne u ovom smislu: Ako je neka funkcija rješenje rubnog problema po jednoj od njih, onda je ona rješenje po svakoj.*

12.2. Zadatak

Napišite energetsku formulaciju ravnotežnoga rubnog problema u slučaju (*i*) kad su oba rubna uvjeta geometrijska, (*ii*) kad su oba rubna uvjeta prirodna.

Rješenje. (*i*) Energetska formulacija glasi: Odrediti dozvoljenu funkciju u koja minimizira funkcional

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l (aw'^2 + bw^2)\,dx - \int_0^l fw\,dx \tag{15}$$

na skupu dozvoljenih funkcija w. Pri tome je skup dozvoljenih funkcija dan uvjetom $w(0) = w(l) = 0$.

(*ii*) Energetska formulacija glasi: Odrediti funkciju u koja minimizira funkcional

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l (aw'^2 + bw^2)\,dx + \frac{\delta}{2\gamma} a(l)\,w^2(l) - \frac{\beta}{2\alpha} a(0)\,w^2(0) - \int_0^l fw\,dx. \tag{16}$$

§ 13. Varijacioni račun

Minimizacija funkcionala energije, koju smo razmatrali u § 12, poseban je slučaj važnog *problema o ekstremnim vrijednostima funkcionala.* Tim problemom bavi se **varijacioni račun.** Ovdje ćemo na jednom primjeru pružiti uvid u to područje.

Neka je $\psi(x, y, z)$ dovoljno glatka funkcija varijabli $x, y, z \in R$. Promotrimo funkcional

$$\Psi(w) = \int_0^l \psi(x, w(x), w'(x))\,dx \tag{1}$$

na skupu *dozvoljenih funkcija* w, to jest funkcija koje zadovoljavaju uvjet $w(0) = 0$. Pretpostavimo da na tom skupu Ψ prima *ekstrem* (*minimalnu odnosno maksimalnu vrijednost*) na funkciji u. Tada za svako dozvoljeno v funkcija

$$\Psi(u + \lambda v) \tag{2}$$

varijable $\lambda \in \mathbf{R}$ ima ekstrem u točki $\lambda = 0$. Kako znamo iz diferencijalnog računa, to povlači

$$\left[\frac{d}{d\lambda}\Psi(u + \lambda v)\right]_{\lambda=0} = 0. \tag{3}$$

Izraz na lijevoj strani u (3) zove se **varijacija funkcionala** Ψ na funkciji u i obilježava sa

$$\delta \Psi(u, v), \tag{4}$$

pa (3) možemo pisati ovako:

$$\delta \Psi(u, v) = 0 \quad \textit{za svako dozvoljeno } v. \tag{5}$$

To je **varijaciona jednadžba** funkcionala Ψ. Izračunajmo $\delta \Psi(u, v)$.

Iz

$$\Psi(u + \lambda v) = \int_0^l \varphi(x, u(x) + \lambda v(x), u'(x) + \lambda v'(x))\, dx \tag{6}$$

slijedi

$$\delta \Psi(u, v) = \int_0^l \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)(x, u(x), u'(x)\, v(x)\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)(x, u(x), u'(x))\, v'(x))\, dx. \tag{7}$$

Kraće pišemo

$$\delta \Psi(u, v) = \int_0^l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} v + \frac{\partial \varphi}{\partial u'} v'\right) dx. \tag{8}$$

Varijaciona jednadžba, dakle, glasi

$$\int_0^l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} v + \frac{\partial \varphi}{\partial u'} v'\right) dx = 0 \quad \textit{za svako dozvoljeno } v. \tag{9}$$

Provedemo li u drugom članu parcijalnu integraciju, dobivamo

$$\int_0^l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u'}\right)'\right) v\, dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)(l, u(l), u'(l))\, v(l) = 0. \tag{10}$$

Zbog proizvoljnosti v slijedi (kao i u § 11)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u'}\right)' = 0, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)(l, u(l), u'(l)) = 0. \tag{12}$$

Dakle, *funkcija u na kojoj funkcional* (1) *postiže ekstrem zadovoljava diferencijalnu jednadžbu* (11) *i prirodni rubni uvjet* (12), a po pretpostavci i geometrijski uvjet

$$u(0) = 0. \tag{13}$$

Tako se problem ekstrema funkcinala Ψ svodi na rješavanje (općenito *nelinearnog*) rubnog problema (11—(13). Jednadžba (11) zove se **Eulerova jednadžba funkcionala Ψ.**

Najčešće funkcija ψ ne ovisi o x $\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0\right)$; u tom slučaju Eulerova jednadžba se pojednostavnjuje i prima oblik

$$\Psi - u' \frac{\partial \Psi}{\partial u'} = \text{const.} \tag{14}$$

Zaista, zbog (11) imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\psi - u' \frac{\partial \psi}{\partial u'}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial u} u' + \frac{\partial \psi}{\partial u'} u'' - u'' \frac{\partial \psi}{\partial u'} - u' \left(\frac{\partial \psi}{\partial u'}\right)' = \tag{15}$$

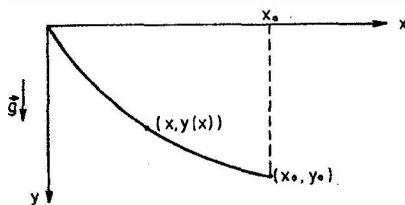
$$= \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial u'}\right)'\right) u' = 0,$$

iz čega slijedi (14).

Uz neke pretpostavke o funkciji ψ vrijedi i obrat gornjeg zaključka, tj. funkcional ψ postiže ekstrem na rješenju problema (11)—(13). Da bismo to zaključili, često se zadovoljavamo fizikalnim ili geometrijskim argumentima. U nekim slučajevima rješenje je dano formulom. Mi ćemo navesti jedan takav slučaj, tzv. *problem brahistohrone*, važan za povijest matematike*.

13.1. Primjer

U vertikalnoj ravnini xy (sl. 1) zadana je točka (x_0, y_0). Među krivuljama koje prolaze kroz ishodište i točku (x_0, y_0) treba odrediti onu po kojoj teška materijalna točka, ispuštena iz ishodišta, kližući se bez trenja stigne u točku (x_0, y_0) za najkraće vrijeme. Takva krivulja $\mathscr{K}$ zove se *brahistohrona***. Neka je jednadžba te krivulje



Slika 1.

* Problem je postavio J. Bernouli 1696, a riješio ga je sam I. Newton iste godine.

** Grčki *brahistos* znači najkraći, a *hronos* vrijeme.

$$y = y(x). \tag{16}$$

Prema *zakonu o sačuvanju energije* brzina materijalne točke na mjestu $(x, y(x))$ jednaka je

$$(2gy(x))^{1/2}. \tag{17}$$

To znači

$$\frac{ds}{dt} = (2gy)^{1/2}, \tag{18}$$

gdje je s duljina luka krivulje $\mathscr{K}$, računata od ishodišta, a t vrijeme. Iz (15) i (16) slijedi

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{(2gy)^{1/2}}, \tag{19}$$

ili

$$\frac{dt}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{(2gy)^{1/2}}. \tag{20}$$

Uzimajući u obzir da je $ds = (1 + y'^2)^{1/2}\, dx$, dobivamo

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{1 + y'^2}{2gy}\right)^{1/2} \tag{21}$$

ili

$$t = \int_0^x \left(\frac{1 + y'^2}{2gy}\right)^{1/2} dx. \tag{22}$$

Prema tome, problem brahistohrone svodi se na minimizaciju funkcionala

$$\Psi(y) = \int_0^{x_0} \psi(y, y')\, dx, \tag{23}$$

gdje je

$$\psi(y, y') = \left(\frac{1 + y'^2}{y}\right)^{1/2}. \tag{24}$$

Prema (14) minimizirajuća funkcija zadovoljava jednadžbu

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y}\right)^{1/2} - \frac{y'^2}{(y(1 + y'^2))^{1/2}} = const., \tag{25}$$

ili

$$y(1 + y'^2) = C, \tag{26}$$

gdje je C konstanta. Stavimo li

$$y' = \operatorname{tg}\omega, \ -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}, \tag{27}$$

dobivamo

$$y = \frac{C}{1 + \operatorname{tg}^2\omega} = \frac{C}{2}(1 + \cos 2\omega). \tag{28}$$

Iz (27) i (28) slijedi

$$\operatorname{tg}\omega = -C \sin 2\omega \cdot \omega' \tag{29}$$

ili

$$\frac{dx}{d\omega} = -C(1 + \cos 2\omega). \tag{30}$$

Iz (30) dobivamo

$$x = C_1 - C\omega - \frac{C}{2}\sin 2\omega, \tag{31}$$

gdje je C_1 konstanta. Jednadžbe (28) i (31) parametarski označuju krivulju $\mathscr{K}$*. Da bismo lakše prepoznali o kojoj se krivulji radi, uvedimo novi parametar

$$\vartheta = \pi - 2\omega. \tag{32}$$

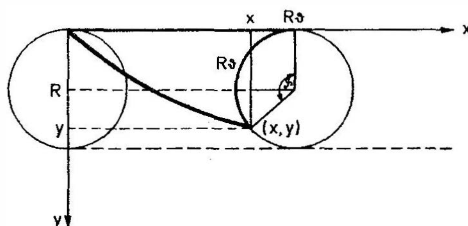
Dobivamo

$$x = D + R(\vartheta - \sin\vartheta), \ y = R(1 - \cos\vartheta), \tag{33}$$

gdje su R i D konstante. Uzmemo li da je u ishodištu $\vartheta = 0$, izlazi $D = 0$. Konstanta R dobiva se iz uvjeta $y(x_0) = y_0$. Krivulja

$$x = R(\vartheta - \sin\vartheta), \ y = R(1 - \cos\vartheta) \tag{34}$$

zove se *cikloida*. Nju opisuje točka kružnice radiusa R, koja se bez klizanja kotrlja po x-osi (sl. 2)**.



Slika 2.

* Ovdje nas fizikalni argumenti uvjeravaju da je dobivena krivulja brahistohrona.

** Način kojim smo riješili problem brahistohrone ima niz nedostataka; opravdanje svih zaključaka zahtijevalo bi mnogo prostora (v. L. Švarc, Analiz, Tom I, Izdat. »Mir«, Moskva, 1972, str. 384—389).

Neka je na skupu dozvoljenih funkcija w pored funkcionala (1) zadan i funkcional

$$\Phi(u) = \int_0^l \varphi(x, w(x), w'(x))\, dx, \tag{35}$$

gdje je $\varphi(x, y, z)$ dovoljno glatka funkcija varijabli $x, y, z \in \mathbf{R}$. Neka je V skup dozvoljenih funkcija w koje zadovoljavaju uvjet

$$\Phi(w) = 1. \tag{36}$$

Izoperimetrički problem sastoji se u određivanju funkcije na kojoj funkcional Ψ postiže ekstrem na skupu V.

Neka je $u \in V$ rješenje izoperimetričkog problema. Promatrajmo funkciju

$$u + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \tag{37}$$

gdje su v_1 i v_2 dozvoljene funkcije, a α_1 i α_2 brojevi. Neka je

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \Phi(u + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2). \tag{38}$$

Imamo

$$f(0, 0) = \Phi(u) = 1. \tag{39}$$

Izračunajmo derivacije funkcije f u točki (0, 0). Imamo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int_0^l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} v_i + \frac{\partial \varphi}{\partial u'} v_i'\right) dx = \delta \Phi(u, v_i). \tag{40}$$

Pretpostavimo da funkcija u ne zadovoljava varijacionu jednadžbu funkcionala Φ. Tada postoji bar jedno v_2 takvo da je

$$\delta \Phi(u, v_2) \neq 0. \tag{41}$$

Uz takav izbor funkcije v_2 imamo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=0} \neq 0. \tag{42}$$

Prema *Teoremu o implicitnoj funkciji* iz (39) i (42) slijedi da je u nekoj okolini točke $\alpha_1 = 0$ definirana funkcija $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ takva da vrijedi

$$\alpha_2(0) = 0, \tag{43}$$

$$f(\alpha_1, \alpha_2(\alpha_1)) = 1. \tag{44}$$

Za dovoljno malo $|\alpha_1|$ iz (44) slijedi

$$\Phi(u + \alpha_1 v_1 + \alpha_2(\alpha_1) v_2) = 1. \tag{45}$$

Iz (43) i (45) zaključujemo da vrijedi

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\alpha_1} \psi(u + \alpha_1 v_1 + \alpha_2(\alpha_1) v_2)\right)_{\alpha_1=0} = 0 \tag{46}$$

za svako dozvoljeno v_1. Iz toga dobivamo

$$\int_0^l \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} v_1 + \frac{\partial \psi}{\partial u'} v_1'\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}\,\alpha_2}{\mathrm{d}\,\alpha_1}\right)_{\alpha_1=0} \int_0^l \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} v_2 + \frac{\partial \psi}{\partial u'} v_2'\right) \mathrm{d}x = 0, \tag{47}$$

ili

$$\delta\,\Psi(u, v_1) + \left(\frac{\mathrm{d}\,\alpha_2}{\mathrm{d}\,\alpha_1}\right)_{\alpha_1=0} \delta\,\Psi(u, v_2) = 0. \tag{48}$$

Iz (44) nalazimo

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\alpha_2}{\mathrm{d}\,\alpha_1}\right)_{\alpha_1=0} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial\,\alpha_1}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=0}}{\left(\frac{\partial f}{\partial\,\alpha_2}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=0}} = -\frac{\delta\,\Phi(u, v_1)}{\delta\,\Phi(u, v_2)}. \tag{49}$$

Neka je

$$\lambda = -\frac{\delta\,\Psi(u, v_2)}{\delta\,\Phi(u, v_2)}. \tag{50}$$

Iz (48)—(50) dobivamo

$$\delta\,\Psi(u, v_1) + \lambda\,\delta\,\Phi(u, v_1) = 0 \tag{51}$$

ili

$$\delta(\Psi + \lambda\,\Phi)(u, v_1) = 0, \tag{52}$$

za svako dozvoljeno v_1. Imamo, dakle, ovaj zaključak:

Ako je funkcija u rješenje izoperimetričkog problema i ako ona ne zadovoljava varijacionu jednadžbu funkcionala Φ, onda postoji broj λ takav da ona zadovoljava varijacionu jednadžbu funkcionala $\Psi + \lambda\,\Phi$.

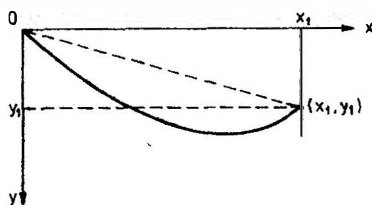
Iz varijacione jednadžbe (52) slijedi Eulerova jednadžba i prirodni rubni uvjet funkcionala $\Psi + \lambda\,\Phi$.

13.2. Primjer

Teška nerastezljiva homogena *nit* visi obješena o krajeve. Treba odrediti ravnotežni položaj niti polazeći od *principa minimuma potencijalne energije.*

Neka su krajevi niti točke $(0, 0)$ i (x_1, y_1), $x_1 > 0$ (sl. 3); neka je duljina niti jednaka l, a njen položaj krivulja $y = y(x)$. Potencijalna energija niti je

$$\Psi(y) = \varrho g \int_0^{x_1} y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x. \tag{53}$$



Slika 3.

Duljina krivulje $y = y(x)$ je

$$\Phi(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x. \tag{54}$$

Prema *principu minimuma potencijalne energije* ravnotežni položaj niti je funkcija $y(x)$ koja zadovoljava rubne uvjete $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$ i minimizira funkcional (53) uz uvjet

$$\Phi(y) = l. \tag{55}$$

Znamo da postoji broj λ takav da funkcija y zadovoljava Eulerovu jednadžbu funkcionala

$$\Psi(y) + \lambda \Phi(y) = \int_0^{x_1} (\varrho g y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x. \tag{56}$$

Budući da podintegralna funkcija ne ovisi eksplicitno o varijabli x, prema (14) vrijedi

$$y - b = a \sqrt{1 + y'^2}, \tag{57}$$

gdje je a konstanta i gdje smo stavili $\lambda = -\varrho g b$. Pretpostavljamo netrivijalan slučaj $y \neq \text{const.}$ Zato je $a \neq 0$. Supstitucijom

$$y - b = a \operatorname{ch} z \tag{58}$$

dobivamo

$$z = \frac{x - a}{a}, \tag{59}$$

gdje je a konstanta. Iz (58) i (59) slijedi

$$y - b = a \operatorname{ch} \frac{x - \alpha}{a}. \tag{60}$$

Krivulja (60) zove se *lančanica* (jer opisuje i ravnotežni položaj lanca obješena o dvije točke). Konstante a, b i α određuju se iz rubnih uvjeta

$$y(0) = 0, \; y(x_1) = y_1, \tag{61}$$

te iz uvjeta

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} \, \mathrm{d}x = l, \tag{62}$$

koji zadaje duljinu niti. Imamo ove nelinearne jednadžbe:

$$b = -a \operatorname{ch} \frac{\alpha}{a}, \tag{63}$$

$$y_1 - b = a \operatorname{ch} \frac{x_1 - \alpha}{a}, \tag{64}$$

$$\operatorname{sh} \frac{x_1 - \alpha}{a} = \frac{l}{a} - \operatorname{sh} \frac{\alpha}{a}, x_1 < 1. \tag{65}$$

Iz (63) i (64) dobivamo

$$y_1 = -2 a \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} \nu, \tag{66}$$

gdje je

$$\mu = \frac{2\alpha - x_1}{2a}, \qquad \nu = \frac{x_1}{2a}. \tag{67}$$

Iz (65) slijedi

$$l = 2 a \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \nu. \tag{68}$$

Iz (66) i (68) dobivamo

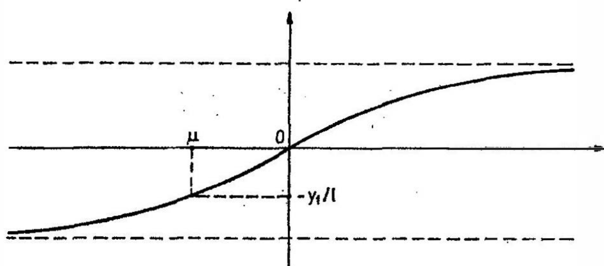
$$\operatorname{th} \mu = -\frac{y_1}{l}. \tag{69}$$

Očigledno je

$$l > \sqrt{x_1^2 + y_1^2} > y_1, \tag{70}$$

pa imamo $|y_1|/l < 1$. Prema tome, jednadžba (69) ima jedinstveno rješenje μ (sl. 4). Iz (66) i (68) slijedi

$$\sqrt{l^2 - y_1^2} = 2\,a\,\mathrm{sh}\,\nu; \tag{71}$$



Slika 4.

dijeleći to sa $x_1/2a = \nu$, dobivamo

$$\frac{\mathrm{sh}\,\nu}{\nu} = \frac{\sqrt{l^2 - y_1^2}}{x_1}. \tag{72}$$

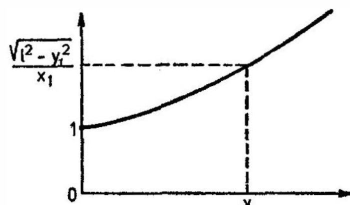
Iz Mac Laurinovog reda za funkciju sh ν nalazimo

$$\frac{sh\,\nu}{\nu} = 1 + \frac{\nu^2}{3!} + \frac{\nu^4}{5!} + \ldots. \tag{73}$$

Iz toga zaključujemo da funkcija sh ν/ν strogo monotono raste od 1 do ∞ kad ν raste od 0 do ∞. Prema tome, funkcija sh ν/ν prima svaku pozitivnu vrijednost, i to samo jednom. Iz (70) slijedi

$$\frac{\sqrt{l^2 - y_1^2}}{x_1} > 1, \tag{74}$$

pa jednadžba (72) ima jedinstveno rješenje ν (sl. 5). Konstante a i α određujemo sada iz (67).



Slika 5.

13.3. Zadatak

Izvedite jednadžbu (60) polazeći od *jednadžbe ravnoteže* niti.

Rješenje. Neka je $\vec{q}$ *kontaktna sila. Jednadžba ravnoteže* je

$$\frac{d\vec{q}}{ds} - \varrho g\vec{j} = 0; \tag{75}$$

ds je element luka (koji se u ovom slučaju ne može zamijeniti sa dx). *Sila $\vec{q}$ je tangencijalna na nit*:

$$\vec{q}(x) = q(x)\vec{t}(x) = q(x)\left(\frac{\vec{i}}{\sqrt{1+y'^2(x)}} + \frac{y'(x)\vec{j}}{\sqrt{1+y'^2(x)}}\right). \tag{76}$$

Rastavljanjem u komponente i upotrebom formule

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}\frac{d}{dx}, \tag{77}$$

dobivamo

$$\frac{d}{dx}\frac{q}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0, \tag{78}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{qy'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = \varrho g\sqrt{1+(y')^2}. \tag{79}$$

To je sustav od dviju jednadžba s dvjema nepoznatim funkcijama y i q. Iz (78) dobivamo

$$q = const.\sqrt{1+(y')^2}. \tag{80}$$

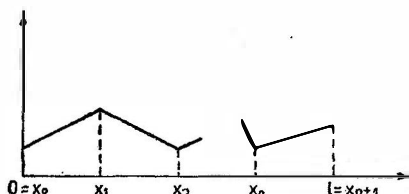
Uvrštavajući (80) u (79), za y dobivamo jednadžbu drugog reda s općim rješenjem (60).

§ 14. Metoda konačnih elemenata

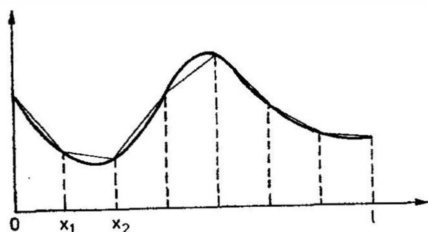
Promotrimo sada ravnotežni rubni problem s praktičnog gledišta. Do sada nismo (osim u slučaju $b = 0$, § 5) dali konstrukciju rješenja koja bi mogla zadovoljiti praktične potrebe. Iako je (10.7) eksplicitna formula za rješenje, primjena te formule pretpostavlja poznavanje Greenove funkcije; s druge strane, Greenovu funkciju u slučaju $b \neq 0$ možemo eksplicitno izračunati samo u posebnim slučajevima. Preostaje da se rješenje rubnog problema odredi približno uz unaprijed zadanu točnost. U tu svrhu zgodno je poći od varijacione formulacije problema (§ 11).

Da bismo konstruirali približno rješenje, razdijelimo segment $[0, l]$ na $n+1$ jednakih dijelova *čvornim točkama* (*čvorovima*) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i stavimo $x_0 = 0$, $x_{n+1} = l$ (sl. 1). Kažemo da je funkcija w *po dijelovima linearna* (uz razdiobu $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

ako je ona na svakom intervalu (x_k, x_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots, n)$ linearna i ako je u svakom čvoru x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ neprekidna (sl. 1). Skup svih takvih funkcija označimo sa $V_n^1(0, l)$ (kraće V_n^1). Funkcija $w \in V_n^1$ jednoznačno je određena svojim vrijednostima $w_0, w_1, \ldots, w_{n+1}$ u čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$. *Proizvoljna superpozicija funkcija iz V_n^1 je funkcija iz V_n^1*. Očekujemo da se svaka funkcija na segmentu $[0, l]$ može dobro aproksimirati nekom funkcijom iz V_n^1 ako se uzme dovoljno gusta razdioba, to jest veliko n* (sl. 2).



Slika 1.



Slika 2.

Svakom čvoru x_k $(k = 0, 1, \ldots, n + 1)$ pridružit ćemo po jednu posebnu funkciju $\varphi_k \in V_n^1$, definiranu formulom

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \\ \dfrac{1}{h}(x - x_{k-1}), \; x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \dfrac{1}{h}(x_{k+1} - x), \; x \in [x_k, x_{k+1}], \end{cases} \tag{1}$$

gdje je $h = l/(n + 1)$ (sl. 3). Funkcije $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ imaju ovo svojstvo:

$$\varphi_k(x_j) = \begin{cases} 0 \text{ za } j \neq k \\ 1 \text{ za } j = k. \end{cases} \tag{2}$$

Svaka funkcija $w \in V_n^1$ može se prikazati kao superpozicija funkcija φ_k:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n+1} w_k \varphi_k(x) = w_0 \varphi_0(x) + w_1 \varphi_1(x) + \ldots + w_n \varphi_n(x) + w_{n+1} \varphi_{n+1}(x), \tag{3}$$

gdje je

$$w_k = w(x_k). \tag{4}$$

Zaista, zbog svojstva (2) funkcije na lijevoj i desnoj strani u (3) podudaraju se u čvorovima pa se podudaraju svuda. *Prikaz* (3) *je za funkciju $w \in V_n^1$ jedinstven*, jer zbog svojstva (2) iz (3) slijedi jednakost (4). Prema (3) svaka funkcija iz V_n^1 je određena konačnim brojem $(n + 2)$ parametara pa je prikladna za numeričko računanje.

* To znači da je V_n^1 *linearni prostor*. Očigledno je $V_n^1 \subset \mathscr{H}^1$ i $V_n^1 \not\subseteq \mathscr{H}^2$.

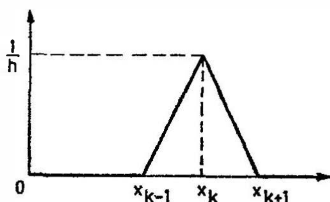
Navedimo još formulu za derivaciju funkcije $w \in V_n^1$. Iz (3) dobivamo

$$w'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} w_k \varphi_k'(x), \tag{5}$$

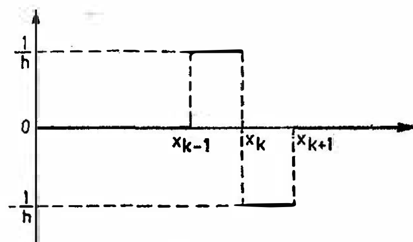
pri čemu je

$$\varphi_k'(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}) \\ \dfrac{1}{h}, & x \in [x_{k-1}, x_k) \\ -\dfrac{1}{h}, & x \in [x_k, x_{k+1}). \end{cases} \tag{6}$$

Funkcija w' je na svakom intervalu $[x_{k-1}, x_k)$ konstanta, a u čvorovima ima skokove (sl. 4).



Slika 3.



Slika 4.

I ovdje ćemo razmatrati problem s karakterističnim rubnim uvjetima:

$$-(au')' + bu = f \tag{7}$$

$$u(0) = 0 \tag{8}$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = 0, \ \gamma > 0. \tag{9}$$

Njegova varijaciona formulacija glasi ovako: odrediti dozvoljenu funkciju u koja zadovoljava varijacionu jednadžbu

$$\int_0^l (au'v' + buv)\, \mathrm{d}x + \frac{\delta}{\gamma} a(l)\, u(l)\, v(l) = \int_0^l fv dx, \ \textit{za svako dozvoljeno } v; \tag{10}$$

pri tome su dozvoljene funkcije one koje zadovoljavaju rubni uvjet (8). Za svaku dozvoljenu funkciju $w \in V_n^1$ vrijedi

$$w(x) = \sum_{k=1}^{n+1} w_k \varphi_k(x). \tag{11}$$

Budući da očekujemo da se svaka dozvoljena funkcija može dobro aproksimirati nekom funkcijom oblika (11), približno rješenje problema (10) tražit ćemo u tom

obliku. Reći ćemo da je dozvoljena funkcija $\widetilde{u} \in V_n^1$ *približno rješenje problema* (10), ako vrijedi

$$\int_0^l (a\widetilde{u}'v' + buv)\,dx + \frac{\delta}{\gamma} a(l)\,\widetilde{u}(l)\,v(l) = \int_0^l fv\,dx \quad \textit{za svako dozvoljeno } v \in V_n^1. \tag{12}$$

Uzimajući u obzir da se za veliko n skup V_n^1 »malo« razlikuje od skupa svih dozvoljenih funkcija, možemo reći da se od približnog rješenja zahtijeva da »približno« zadovoljava varijacionu jednadžbu.

Da bi gornja definicija imala smisla, potrebno je

(i) dokazati da približno rješenje postoji, te naći efektivan postupak za njegovo određivanje;

(ii) dokazati da s rastućim n približno rješenje po volji dobro aproksimira pravo (točno) rješenje i po mogućnosti dati ocjenu greške.

Približno rješenje u i proizvoljnu dozvoljenu funkciju $v \in V_n^1$ pišemo u obliku

$$\widetilde{u} = \sum_{k=1}^{n+1} \widetilde{u}_k\,\varphi_k, \tag{13}$$

$$v = \sum_{k=1}^{n+1} v_k\,\varphi_k, \tag{14}$$

pri čemu se niz $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_{n+1}$ mora odrediti, a $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ su proizvoljni. Zbog $\widetilde{u}_k = \widetilde{u}(x_k)$ brojevi $\widetilde{u}_k$ su približne vrijednosti rješenja u čvorovima x_k. Uvrštavajući (13) i (14) u (12), dobivamo

$$\int_0^1 a(x) \sum_{k=1}^{n+1} \widetilde{u}_k\,\varphi_k'(x) \sum_{j=1}^{n+1} v_j\,\varphi_j'(x)\,dx + \int_0^l b(x) \sum_{k=1}^{n+1} \widetilde{u}_k\,\varphi_k(x) \sum_{j=1}^{n+1} v_j\,\varphi_j(x) +$$

$$+ \frac{\delta}{\gamma} a(l)\,\widetilde{u}_{n+1}\,v_{n+1} = \int_0^l f(x) \sum_{k=1}^{n+1} v_j \cdot \varphi_j(x), \tag{15}$$

ili

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} (a_{jk} + b_{jk})\,\widetilde{u}_k\,v_j = \sum_{j=1}^{n+1} f_j\,v_j, \tag{16}$$

gdje je*

$$a_{jk} = \int_0^l a(x)\,\varphi_k'(x)\,\varphi_j'(x)\,dx + \frac{\delta}{\gamma} a(l)\,\delta_{j\,n+1}\,\delta_{k\,n+1}, \tag{17}$$

---

* δ_{rs} je *Kroneckerov simbol:* $\delta_{rs} = 0$ za $r \neq s$ i $\delta_{rr} = 1$.

$$b_{jk} = \int_0^l b(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x, \tag{18}$$

$$f_j = \int_0^l f(x)\,\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x. \tag{19}$$

Budući da je izbor niza $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ proizvoljan, možemo u (16) staviti redom

$$(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}) = (1, 0, 0, \ldots, 0) \tag{20}$$

$$(0, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$(0, 0, 0 \ldots, 1).$$

To daje

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n+1} (a_{1k} + b_{1k})\,\tilde{u}_k = f_1 \\ &\sum_{k=1}^{n+1} (a_{2k} + b_{2k})\,\tilde{u}_k = f_2 \\ &\text{-------------------------------} \\ &\sum_{k=1}^{n+1} (a_{n+1k} + b_{n+1k})\,\tilde{u}_k = f_{n+1}, \end{aligned} \tag{21}$$

ili

$$\sum_{k=1}^{n+1} (a_{jk} + b_{jk})\,\tilde{u}_k = f_j,\ j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{22}$$

To je linearni sustav od $n + 1$ jednadžbi za $n + 1$ nepoznanica $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_{n+1}$. Stavljajući

$$A_{jk} = a_{jk} + b_{jk} \tag{23}$$

sustav (22) pišemo u obliku

$$\sum_{j=1}^{n+1} A_{jk}\,\tilde{u}_k = f_j,\ j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{24}$$

Primijetimo da je prema (17), (18) i (23) matrica $A = (A_{jk})$ tog sustava *simetrična*:

$$A_{jk} = A_{kj}; \tag{25}$$

ona se obično naziva *matricom krutosti*.

Matrica A je *regularna*, pa sustav (24) ima jedno i samo jedno rješenje $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_{n+1})$; ono zadovoljava jednadžbu (16), to jest daje aproksimaciju rješenja problema (10) u čvorovima $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Dokazat ćemo *regularnost matrice* A. Za bilo koji izbor $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ prema (17), (18) i (23) imamo

$$\sum_{k,j=1}^{n+1} A_{jk} v_k v_j = \sum_{k,j=1}^{n+1} v_k v_j \int_0^l a(x) \varphi_k'(x) \varphi_j'(x) \, dx + \frac{\delta}{\gamma} a(l) v_{n+1}^2 +$$

$$+ \sum_{k,j=1}^{n+1} v_k v_j \int_0^l b(x) \varphi_k(x) \varphi_j(x) \, dx = \int_0^l a(x) \left(\sum_{k=1}^{n+1} v_k \varphi_k'(x) \right) \left(\sum_{j=1}^{n+1} v_j \varphi_j'(x) \right) dx +$$

$$+ \frac{\delta}{\gamma} a(l) v_{n+1}^2 + \int_0^l b(x) \left(\sum_{k=1}^{n+1} v_k \varphi_k(x) \right) \left(\sum_{j=1}^{n+1} v_j \varphi_j(x) \right) dx =$$

$$= \int_0^l a(x) \left(\sum_{k=1}^{n+1} v_k \varphi_k'(x) \right)^2 dx + \frac{\delta}{\gamma} a(l) v_{n+1}^2 + \int_0^l b(x) \left(\sum_{k=1}^{n+1} v_k \varphi_k(x) \right)^2 dx. \tag{26}$$

Pretpostavimo da je

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_{jk} v_k = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{27}$$

Množenjem j-te jednakosti (27) sa v_j i sumiranjem po $j = 1, 2, \ldots, n+1$ dobivamo

$$\sum_{j,k=1}^{n+1} A_{jk} v_k v_j = 0. \tag{28}$$

Iz (26) i (28) slijedi (zbog $a(x) > 0$, $b(x) \geq 0$)

$$\sum_{k=1}^{n+1} v_k \varphi_k' = \left(\sum_{k=1}^{n+1} v_k \varphi_k \right)' = 0 \tag{29}$$

ili

$$\sum_{k=1}^{n+1} v_k \varphi_k = const. \tag{30}$$

Zbog $\varphi_k(0) = 0$ imamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} v_k \varphi_k(x) = 0 \tag{31}$$

za sve $x \in [0, l]$. Iz toga dobivamo (stavljajući $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$)

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_{n+1} = 0. \tag{32}$$

Prema tome, iz (27) slijedi (32), a to znači da je matrica A regularna.

Pozabavit ćemo se ukratko i efektivnim rješavanjem sustava (24). Primijenit ćemo klasičnu *Gaussovu metodu eliminacije bez permutiranja redaka i*

*stupaca**. Situacija je računski posebno povoljna zbog toga što je matrica A *trodijagonalna*, tj. vrijedi

$$A_{jk} = 0 \text{ za } |j - k| > 1; \tag{33}$$

to slijedi iz činjenice da produkt dviju funkcija φ_k i φ_j (kao i njihovih derivacija) iščezava ako one nisu susjedi ($|k - j| > 1$). Točnije, imamo

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & & & \\ B_1 & A_2 & B_2 & 0 & & \\ 0 & B_2 & A_3 & B_3 & 0 & \\ & & 0 & B_{n-1} & A_n & B_n \\ & & 0 & 0 & B_n & A_{n+1} \end{bmatrix} \tag{34}$$

gdje je

$$A_k = A_{kk} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} a(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{h^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} b(x)(x - x_{k-1})^2\,\mathrm{d}x + $$

$$+ \frac{1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} b(x)(x_{k+1} - x)^2\,\mathrm{d}x,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \tag{35}$$

$$A_{n+1} = A_{n+1\ n+1} = \frac{1}{h^2} \int_{x_n}^{l} a(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{\gamma} a(l) + \frac{1}{h^2} \int_{x_n}^{l} b(x)(x_n - x)^2\,\mathrm{d}x, \tag{36}$$

$$B_k = A_{kk+1} = -\frac{1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} a(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} b(x)(x_{k+1} - x)(x - x_k)\,\mathrm{d}x,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n. \tag{37}$$

Za sustav (24) moguće je Gaussove eliminacije izvesti na ovaj jednostavan način**:

direktni hod:

$$k = 1, 2, \ldots, n:$$

$$s = B_k / A_k \tag{38}$$

$$A_{k+1} = A_{k+1} - sB_k$$

$$f_{k+1} = f_{k+1} - sf_k$$

---

* To je moguće zbog *pozitivne definitnosti* matrice A; naime, iz (26) slijedi $\sum_{j,k=1}^{n+1} A_{jk} v_k v_j \geq 0$, a kao što smo vidjeli, (27) povlači (32).

** U formulama koje slijede upotrijebili smo oznake uobičajene u opisivanju računskih postupaka (algoritama), podešenih za računanje na stroju. Tako $a_{k+1} = a_{k+1} - sb_k$ znači: »izračunaj $a_{k+1} - sb_k$ i dobiveni rezultat upiši na mjesto gdje je stajao a_{k+1}«.

obratni hod:

$$k = n, n - 1, \ldots, 1:$$

$$f_k = f_k - B_k \tag{39}$$
$$\widetilde{u}_k = f_k / A_k.$$

U formulama (19), (35)—(37) potrebno je izračunati zadane integrale, što za općeniti izbor podintegralnih funkcija zahtijeva upotrebu neke metode *približne integracije**. Jednostavna mogućnost je zamijeniti funkcije a, b i f njihovim linearnim interpolacijama na svakom segmentu $[x_k, x_{k+1}]$. Tako umjesto f uzimamo

$$\hat{f} = \sum_{j=0}^{n+1} f(x_j)\, \varphi_j, \tag{40}$$

što umjesto f_k daje

$$\hat{f}_k = \sum_{k=0}^{n+1} f(x_j) \int_0^l \varphi_j \varphi_k \, dx = \frac{h}{6} \begin{cases} f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1}), & k = 1, 2, \ldots, n \\ (f(x_n) + 2f(x_{n+1}), & k = n + 1, \end{cases} \tag{41}$$

pri čemu smo se koristili formulom

$$\int_0^l \varphi_k \varphi_j \, dx = \frac{h}{6} \begin{cases} 4, & k = j = 1, 2, \ldots, n \\ 1, & |k - j| = 1 \\ 2, & k = j = 0,\ n + 1 \\ 0, & |k - j| > 1. \end{cases} \tag{42}$$

Na isti način postupamo i s funkcijama a i b.

Izračunavanje približnog rješenja problema (10) koje smo ovdje opisali zove se **metoda konačnih elemenata****. Funkcije φ_k zovu se **linearni elementi.**

Pogledajmo u kakvoj je vezi približno rješenje $\widetilde{u}$ s funkcionalom energije Φ (§ 12). Za proizvoljno $v = v_1 \varphi_1 + v_2 \varphi_2 \ldots + v_{n+1} \varphi_{n+1}$ izračunajmo vrijednost funkcionala Φ na funkciji $\widetilde{u} + v$, uzimajući u obzir (16) te formule (17)—(19) i (23):

$$\Phi(\widetilde{u} + v) = \Phi(\widetilde{u}) + \int_0^l (a\widetilde{u}'v' + b\widetilde{u}v - fv)\, dx + \frac{\delta}{\gamma} a(l)\, \widetilde{u}(l)\, v(l) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^l (av'^2 + bv^2)\, dx + \frac{\delta}{2\gamma} a(l)\, v^2(l) = \Phi(\widetilde{u}) + \sum_{j,k=1}^{n+1} A_{jk} \widetilde{u}_k v_j -$$

* Tu metodu biramo tako da pogreška koja pri tom nastaje bude istog »reda veličine« kao i ona koju činimo opisanom diskretizacijom (v. (55)). Točnija približna integracija samo bi povećala opseg računa, a da se ukupna pogreška ne bi bitno smanjila.

** Riječ »konačan« znači da se umjesto »beskonačno malih« (diferencijalnih, infinitezimalnih) promatraju makroskopski komadi tijela (u našem slučaju segmenti $[x_{k-1}, x_k]$), kojima se unaprijed propisuje oblik pomaka (u našem slučaju linearni).

$$-\sum_{j=1}^{n+1} f_j v_j + \frac{1}{2}\int_0^l (av'^2 + bv^2)\,dx + \frac{\delta}{2\gamma} a(l)\, v_{n+1}^2 = \Phi(\tilde{u}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^l (av'^2 + bv^2)\,dx + \frac{\delta}{2\gamma} a(l)\, v_{n+1}^2. \tag{43}$$

Odatle odmah slijedi

$$\Phi(\tilde{u}) \leq \Phi(\tilde{u} + v), \tag{44}$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi onda i samo onda ako je

$$\int_0^l (av'^2 + bv^2)\,dx = 0, \; v_{n+1}^2 = 0, \tag{45}$$

tj. $v = 0$. Prema tome, približno rješenje $\tilde{u}$ problema (10) minimizira funkcionala energije Φ na skupu svih dozvoljenih funkcija iz V_n^1 i jedino je s tim svojstvom Uzimajući u obzir da točno rješenje minimizira funkcional energije na skupu svih dozvoljenih funkcija, možemo reći da gornji zaključak i na drugi način opravdava naziv »približno rješenje« za $\tilde{u}$.

Preostaje nam da preciznije istražimo vezu približnog rješenja $\tilde{u}$ s točnim rješenjem u^*.

U skladu sa (40) linearnu interpolaciju proizvoljne funkcije v na segmentu $[0, l]$, uz razdiobu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, označavat ćemo sa $\hat{v}$. Za dozvoljenu funkciju v imamo

$$\hat{v}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} v(x_k)\, \varphi_k(x). \tag{46}$$

14.1. Lema

Za $v \in \mathscr{H}^2(0, l)$ *i svako* $x \in [0, l]$ *vrijedi*

$$|v'(x) - \hat{v}'(x)| \leq h \max_{\xi \in [0,l]} |v''(\xi)|, \tag{47}$$

$$|v(x) - \hat{v}(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{\xi \in [0,l]} |v''(\xi)|. \tag{48}$$

Dokaz. Zbog $v(x_k) - \hat{v}(x_k) = 0$, $v(x_{k+1}) - \hat{v}(x_{k+1}) = 0$ postoji točka $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ takva da je

$$v'(\xi_k) - \hat{v}'(\xi_k) = 0. \tag{49}$$

* Približno rješenje ovisi i o broju čvorova n, tj. imamo posla s nizom približnih rješenja, pa bi bilo ispravnije stavljati $\tilde{u} = \widetilde{u^{(n)}}$; to ipak ne činimo radi jednostavnijeg pisanja.

Za $x \in (x_k, x_{k+1})$ imamo

$$v'(x) - \hat{v}'(x) = \int_{\xi_k}^{x} (v''(\xi) - \hat{v}''(\xi))\,\mathrm{d}\xi = \int_{\xi_k}^{x} v''(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{50}$$

jer je $\hat{v}'' = 0$. Iz toga slijedi

$$|v'(x) - \hat{v}'(x)| \leq |x - \xi_k| \max_{\xi \in [\xi_k, x]} |v''(\xi)| \leq h \max_{\xi \in [0, l]} |v''(\xi)|. \tag{51}$$

Desna strana te nejednakosti ne ovisi o k pa zato ona vrijedi za svako $x \in [0, l]$; time dobivamo (47). Na segmentu $[x_k, x_{k+1}]$ funkcija $|v(x) - \hat{v}(x)|$ ima maksimum u nekoj točki ξ_k sa svojstvom (49). Neka je, na primjer, $\xi_k - x_k \leq \frac{h}{2}$. Prema Taylorovoj formuli imamo

$$v(x_k) - \hat{v}(x_k) = 0 = v(\xi_k) - \hat{v}(\xi_k) + \frac{1}{2}(v''(\bar{\xi}_k) - \hat{v}''(\bar{\xi}_k))(x_k - \xi_k)^2 = v(\xi_k) - \hat{v}(\xi_k) + \frac{1}{2} v''(\bar{\xi}_k)(x_k - \xi_k)^2, \tag{52}$$

gdje je $x_k < \bar{\xi}_k < \xi_k$. Iz toga dobivamo

$$|v(\xi_k) - \hat{v}(\xi_k)| = \frac{1}{2}(x_k - \xi_k)^2 |v''(\bar{\xi}_k)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \max_{x \in [0, l]} |v''(x)|. \tag{53}$$

Za $x \in [x_k, x_{k+1}]$ imamo

$$|v(x) - \hat{v}(x)| \leq |v(\xi_k) - \hat{v}(\xi_k)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in [0, l]} |v''(x)|. \tag{54}$$

Desna strana te nejednakosti ne ovisi o k pa ona vrijedi za svako $x \in [0, l]$; time dobivamo (48).

14.2. Teorem

Za svako $x \in [0, l]$ *vrijedi*

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq Ch \max_{x \in [0, l]} |u''(x)|, \tag{55}$$

gdje je $C > 0$ konstanta neovisna o h.

Dokaz. Stavljajući u formuli (12.9) $w = \tilde{u}$, dobivamo

$$\frac{1}{2}\int_0^l (a(u' - \widetilde{u}')^2 + b(u - \widetilde{u})^2)\,dx + \frac{\delta}{2\gamma} a(l)(u(l) - \widetilde{u}(l))^2 =$$

$$= \Phi(\widetilde{u}) - \Phi(u). \tag{56}$$

Budući da $\widetilde{u}$ minimizira Φ na skupu V_n^1 i budući da je $\hat{u} \in V_n^1$, vrijedi

$$\Phi(\widetilde{u}) - \Phi(u) \leq \Phi(\hat{u}) - \Phi(u). \tag{57}$$

S druge strane, stavljajući u formuli (12.9) $w = \hat{u}$ (i uzimajući u obzir da je $\hat{u}(l) = u(l)$), dobivamo

$$\Phi(\hat{u}) - \Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^l (a(u' - \hat{u}')^2 + b(u - \hat{u})^2)\,dx. \tag{58}$$

Uzimajući u obzir lemu 14.1 i (58), imamo

$$\Phi(\hat{u}) - \Phi(u) \leq \frac{1}{2}(a_0 h^2 \max_{x\in[0,l]} |u''(x)|^2 + b_0 \frac{h^4}{64} \max_{x\in[0,l]} |u''(x)|^2), \tag{59}$$

gdje smo stavili

$$a_0 = \max_{x\in[0,l]} a(x), \quad b_0 = \max_{x\in[0,l]} b(x). \tag{60}$$

Iz (56), (57) i (59) slijedi

$$\int_0^l (a(u' - \widetilde{u}')^2 + b(u - \widetilde{u})^2)\,dx + \frac{\delta}{\gamma} a(l)(u(l) - \widetilde{u}(l))^2 \leq$$

$$\leq l\left(a_0 + \frac{b_0 h^2}{64}\right) h^2 \max_{x\in[0,l]} |u''(x)|^2 \leq C_1 h^2 \max_{x\in[0,l]} |u''(x)|^2, \tag{61}$$

gdje je, na primjer, $C_1 = l(a_0 + b_0 l^2/64)$. Iz toga dobivamo

$$\int_0^l a(u' - \widetilde{u}')^2\,dx \leq C_1 h^2 \max_{x\in[0,l]} (u''(x))^2. \tag{62}$$

Stavljajući

$$a_1 = \min_{x\in[0,l]} a(x), \tag{63}$$

imamo

$$a_1 \int_0^l (u' - \widetilde{u}')^2\,dx \leq \int_0^l a(u' - \widetilde{u}')^2\,dx \leq C_1 h^2 \max_{x\in[0,l]} |u''(x)|, \tag{64}$$

ili

$$\int_0^l (u' - \widetilde{u}')^2\,dx \leq \frac{C_1 h^2}{a_1} \max_{x\in[0,l]} |u''(x)|. \tag{65}$$

Iz jednakosti

$$u(x) - u(x) = \int_0^x (u'(\xi) - \widetilde{u}'(\xi))\, d\xi, \tag{66}$$

koristeći se Cauchyjevom nejednakosti, dobivamo

$$(u(x) - \widetilde{u}(x))^2 \leq \int_0^x d\xi \int_0^x (u'(\xi) - \widetilde{u}'(\xi))^2\, d\xi \leq l \int_0^l (u'(x) - \widetilde{u}'(x))^2\, dx. \tag{67}$$

Iz (65) i (67) slijedi

$$(u(x) - \widetilde{u}(x))^2 \leq \frac{l\, C_1}{a_1} h^2 \max_{x \in [0, l]} |u''(x)|^2. \tag{68}$$

Stavljajući $\sqrt{l\, C_1 / a_1} = C$, dobivamo (55).

Iz teorema 14.2 slijedi da *približno rješenje teži točnom rješenju uniformno na* $[0, l]$ *kad* $h \to 0$ (tj. $n \to \infty$). Štoviše, nejednakost (55) omogućuje određivanje približnog rješenja s unaprijed zadanom točnosti.

Metoda konačnih elemenata je poseban slučaj *Ritz-Galerkinove metode*, u kojoj se približno rješenje traži u obliku superpozicije »proizvoljnih« linearno nezavisnih funkcija $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$. Odgovarajuća matrica A je tada općenito puna, što je numerički nepovoljno. Linearne elemente kao funkcije χ_k predložio je R. Courant 1943. Ta metoda je ponovno otkrivena 60-tih godina u okviru *strukturalne mehanike** i dobila današnji naziv. Umjesto linearnih mogu se (a kod jednadžbi višeg reda i moraju, v. § 17) uzimati kvadratični, kubični itd. elementi. Time se povećava točnost približnog rješenja, ali matrica A postaje punija. Metoda konačnih elemenata za dvodimenzionalne i trodimenzionalne probleme danas je osnovna numerička metoda u tehnici.

14.3. Zadaci

14.3.1. Opišite metodu konačnih elemenata za slučaj rubnih uvjeta $u(0) = u(l) = 0$.

Rješenje. Približno rješenje $\widetilde{u}$ dano je formulom

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{u}_k \varphi_k(x), \tag{69}$$

---

* *Strukturalna mehanika* se bavi problemima ravnoteže i gibanja štapova, ploča i ljusaka.

gdje je $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_n)$ rješenje linearnog sustava

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk}\, u_k = f_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{70}$$

i gdje su A_{jk} i f_j dani formulama (17), (18), (23) i (19)*.

14.3.2. Opišite metodu konačnih elemenata za slučaj rubnih uvjeta $u'(0) = = u'(l) = 0$.

Rješenje. Približno rješenje u dano je formulom

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \widetilde{u}_k\, \varphi_k(x), \tag{71}$$

gdje je $(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_{n+1})$ rješenje linearnog sustava

$$\sum_{k=0}^{n+1} A_{jk}\, u_k = f_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n+1 \tag{72}$$

i gdje je $A_{jk}, j, k \geq 1$ dano formulama (17), (18) i (23) za $\delta = 0$ i

$$A_{00} = \frac{1}{h^2}\int_0^h a(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{h^2}\int_0^h b(x)(x-h)^2\,\mathrm{d}x, \tag{73}$$

$$A_{01} = A_{10} = -\frac{1}{h^2}\int_0^h a(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{h^2}\int_1^h b(x)\,x(h-x)\,\mathrm{d}x, \tag{74}$$

dok je f_j dano formulom (19). Ako je $b \neq 0$, matrica $A = (A_{jk})$ je *pozitivno definitna* (dokaz je isti kao u slučaju (8), (9)), pa dakle i *regularna*. Situacija je bitno drugačija u slučaju $b = 0$. Tada kao i u (26) vrijedi

$$\sum_{k,j=0}^{n+1} A_{jk}\, v_j v_k = \int_0^l a(x)\left(\sum_{k=0}^{n+1} v_k\, \varphi_k'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq 0, \tag{75}$$

pri čemu lijeva strana iščezava ako i samo ako je

$$\sum_{k=0}^{n+1} v_k\, \varphi_k'(x) = 0 \tag{76}$$

za sve $x \in [0, l]$; to je ispunjeno ako i samo ako je

$$v_0 = v_1 = \ldots = v_{n+1}. \tag{77}$$

---

* Matrica $A = (A_{jk})$ je *pozitivno definitna* i ocjena (55) vrijedi i u ovom slučaju.

Prema tome, matrica A je *singularna*. Zbog toga sustav (72) nije rješiv za bilo koju desnu stranu $(f_0, f_1, \ldots, f_{n+1})$. No, prema § 5. i točno rješenje ne postoji za $b = 0$ i za proizvoljno f, već f mora zadovoljavati uvjet (5. 12). Imamo

$$\sum_{j=0}^{n+1} f_j = \sum_{j=0}^{n+1} \int_0^l f(x)\,\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l f(x)\left(\sum_{j=0}^{n+1} \varphi_j(x)\right)\mathrm{d}x \tag{78}$$

pa zbog

$$\sum_{j=0}^{n+1} \varphi_j(x) = 1 \tag{79}$$

i (5.12) dobivamo

$$\sum_{j=0}^{n+1} f_j = 0. \tag{80}$$

Uz taj uvjet sustav (72) je rješiv i rješenje mu je određeno do na aditivnu konstantu, istu u svakoj komponenti. Interpretacija ovakvog rješenja je ista kao ona u § 5. Jedno rješenje sustava (72) može se naći tako da se uzme, na primjer, $u_0 = 0$, čime taj sustav prelazi u sustav dimenzije $n + 1$, s matricom koja se dobiva iz A brisanjem prvog retka i prvog stupca. Nova matrica je pozitivno definitna.

14.3.3. Problem

$$u'' = -1 \tag{81}$$

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{82}$$

riješite metodom konačnih elemenata za (i) $n = 3$, (ii) $n = 6$ i rezultate usporedite s točnim rješenjem.

Rješenje. Točno rješenje je

$$u(x) = -\frac{1}{2}x(x-1) \tag{83}$$

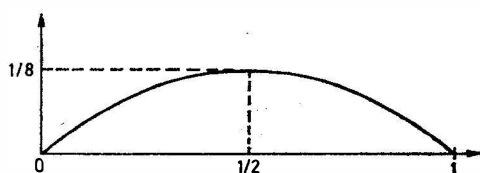
(sl. 5). Približno rješenje dano je formulom (69).

(i) Dobivamo

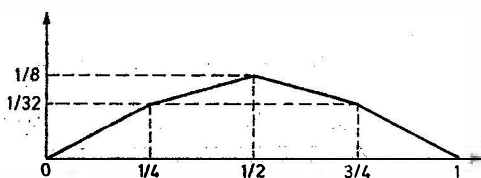
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}, f = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{84}$$

Rješenje sustava (70) je

$$\tilde{u}_1 = \frac{3}{32}, \tilde{u}_2 = \frac{1}{8}, \tilde{u}_3 = \frac{3}{32} \tag{85}$$



Slika 5.



Slika 6.

(sl. 6). Približno i točno rješenje se podudaraju u čvorovima.

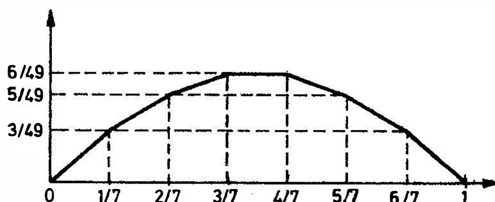
(*ii*) Dobivamo

$$A = \begin{bmatrix} 14 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 14 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 14 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 14 \end{bmatrix}, \; b = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{86}$$

Rješenje sustava (70) je

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_6 = \frac{3}{49}, \; \tilde{u}_2 = \tilde{u}_5 = \frac{5}{49}, \; \tilde{u}_3 = \tilde{u}_4 = \frac{6}{49} \tag{87}$$

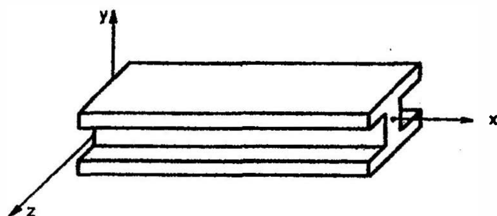
(sl. 7). Približno i točno rješenje se podudaraju u čvorovima.

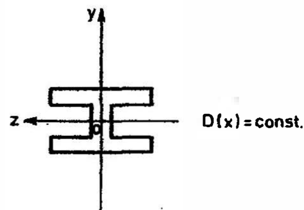


Slika 7.

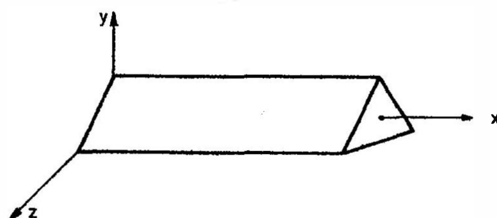
§ 15. Ravnoteža štapa

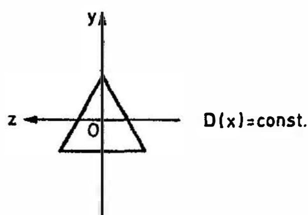
Štap je tijelo kojemu je jedna dimenzija — duljina— znatno veća od drugih. U *nedeformiranom* stanju štap opisujemo segmentom $[0, l]$ na osi x, koji se ovdje zove *centralna linija*, te *poprečnim presjekom* $D(x)$ koji se dobiva tako da se štap presiječe ravninom okomitom na centralnu liniju na mjestu $x \in [0, l]$. Ako je poprečni presjek svuda isti, štap je *cilindričan* (sl. 1, 2). *Pretpostavljat ćemo da u nedeformira-*





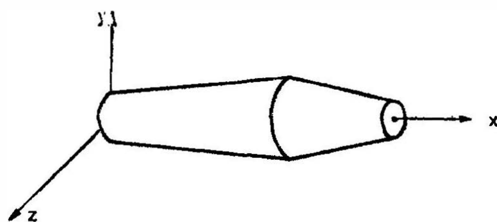
Slika 1.

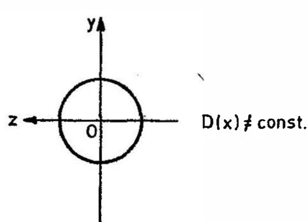




Slika 2.

nom stanju štapa centralna linija prolazi kroz težište poprečnih presjeka. Treba napomenuti da ta pretpostavka ne znači samo poseban izbor centralne linije, već i neko ograničenje na oblik štapa. Dva važna oblika za koja je takav izbor moguć jesu cilindrični štap i štap rotacionog oblika (sl. 3).





Slika 3.

Ograničit ćemo se na promatranje *male deformacije* štapa, do koje prema iskustvu dolazi pri dovoljno *slabome* vanjskom djelovanju.

Eksperimentalna opažanja kao i usporedbe s realističnijom *teorijom elastičnosti* pokazuju da se pri proučavanju male deformacije štapa može poći od sljedećih pretpostavki.

15.1. Pretpostavka

Svaki poprečni presjek ostaje pri pomaku nedeformiran, tj. kruto se pomiče.

15.2. Pretpostavka

Svaki poprečni presjek poslije pomaka ostaje okomit na (pomaknutu) centralnu liniju.

15.3. Pretpostavka

*Pri deformaciji ne dolazi do torzije**.

Sada ćemo dati strogu formulaciju gornjih pretpostavka. Označimo sa $u(x) = \vec{i}u_x(x) + \vec{j}u_y(x) + \vec{k}u_z(x)$ pomak točke x centralne linije. *Pretpostavka da je deformacija mala izražava se ovim uvjetima***:

$$|\vec{u}'(x)| \ll 1, \tag{1}$$

$$|\vec{u}''(x) \ll \frac{1}{l}, \tag{2}$$

za svako $x \in [0, l]$. Iz (1) kao i kod žice (§ 1) slijedi

$$\frac{|\vec{u}(x) - \vec{u}(0)|}{l} \ll 1. \tag{3}$$

Po pretpostavci 15.1 pomak točke $(x, y, z) \in D(x)$ jednak je

$$\vec{u}(x) + \vec{\omega}(x) \times (\vec{j}y + \vec{k}z), \tag{4}$$

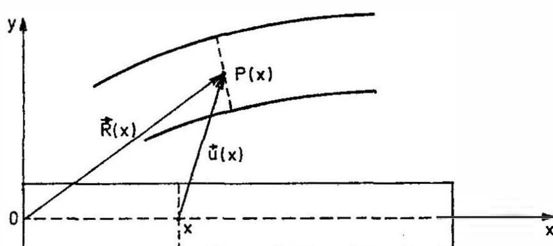
pri čemu $\vec{\omega}(x)$ zovemo *vektor rotacije* presjeka $D(x)$. Pretpostavka 15.2 znači

$$\omega_z = u_y', \omega_y = -u_z', \tag{5}$$

a pretpostavka 15.3 daje

$$\omega_x = 0. \tag{6}$$

Tako je položaj deformiranog štapa potpuno opisan pomakom centralne linije, to jest funkcijom $\vec{u}$.



Slika 4.

---

* Ova pretpostavka nije u proturječju s činjenicom da se štap može tordirati oko osi x, kako je to opisano u zadatku 1.2.2. Rješenje toga prividnog paradoksa jest činjenica da je za torziju štapa potrebno kudikamo jače vanjsko djelovanje negoli za poprečnu ili longitudinalnu deformaciju, koje ovdje promatramo.

** $|u|$ označuje duljinu vektora $\vec{u}$.

Kao i kod žice, označimo sa $P(x)$ *pomaknuti položaj* točke $x \in [0, l]$ (sl. 4). Uvedimo sljedeće oznake:

$\vec{q}(x)$ — *kontaktna sila* na presjeku $D(x)$,
$\vec{f}(x)$ — *gustoća* vanjske linijske sile,*
$\vec{m}(x)$ — *kontaktni spin*** na presjeku $D(x)$,
$\vec{s}(x)$ — *gustoća vanjskog linijskog spina.*

Kontaktni moment na presjeku $D(x)$ je

$$\vec{m}(x) + \vec{R}(x) \times \vec{q}(x), \tag{7}$$

gdje je $\vec{R}(x)$ radijus-vektor točke $P(x)$:

$$\vec{R}(x) = x\vec{i} + \vec{u}(x). \tag{8}$$

Analogno, *gustoća vanjskog linijskog momenta* je

$$\vec{s}(x) + \vec{R}(x) \times \vec{f}(x). \tag{9}$$

Princip ravnoteže glasi: *Ako je tijelo u ravnoteži, onda su ukupna sila i ukupni moment koji djeluju na bilo koji komad tijela jednaki nuli.* Prema tome, za štap u ravnoteži vrijedi

$$\vec{q}(x) - \vec{q}(0) + \int_0^x \vec{f}(\xi)\, d\xi = 0, \tag{10}$$

$$\vec{m}(x) + \vec{R}(x) \times q(x) - \vec{m}(0) + \int_0^x (\vec{s}(\xi) + \vec{R}(\xi) \times \vec{f}(\xi))\, d\xi = 0, \tag{11}$$

pri čemu smo zbog (1) diferencijal duljine luka na deformiranoj centralnoj liniji zamijenili diferencijalom luka na osi x. Deriviranjem po $x \in (0, l)$ izlazi

$$\vec{q}' + \vec{f} = 0, \tag{12}$$

$$\vec{m}' + \vec{R}' \times \vec{q} + \vec{R} \times \vec{q}' + \vec{s} + \vec{R} \times \vec{f} = 0. \tag{13}$$

Zbog (1) stavljamo

$$\vec{R}' \times \vec{q} \approx \vec{i} \times \vec{q}, \tag{14}$$

* Gustoće su uzete na jedinicu duljine nedeformiranog štapa.
** Engleski *to spin* znači vrtjeti.

tako da iz (13) (uzimajući u obzir (12)) dobivamo

$$\vec{m}' + \vec{i} \times \vec{q} + \vec{s} = 0. \tag{15}$$

Jednadžbe (12) i (15) glase u komponentama* ovako:

$$q_x' + f_x = 0 \tag{16}$$

$$q_y' + f_y = 0 \tag{17}$$

$$q_z' + f_z = 0 \tag{18}$$

$$m_y' - q_z + s_y = 0 \tag{19}$$

$$m_z' + q_y + s_z = 0. \tag{20}$$

To su *zakoni ravnoteže* za štap. Sad ćemo opisati *zakone ponašanja* štapa. Primijetimo odmah da će ponašanje za q_y i q_z biti zadano ponašanjem za m_z odnosno m_y, kako slijedi iz (19) i (20).

Za q_x pretpostavljamo da se ponaša po *Hookeovom zakonu* (v. zadatak 1.2.1). To ovdje znači da je površinska gustoća uzdužne kontaktne sile (sila po jedinici površine) na pomaknutom presjeku $D(x)$ proporcionalna derivaciji (po x) uzdužne komponente pomaka (4), to jest jednaka

$$E(u_x'(x) + \omega_y'(x)\,z - \omega_z'(x)\,y) = E(u_x'(x) - u_z(x)\,z - u_y''(x)\,y), \tag{21}$$

gdje je $E > 0$ Youngov modul, koji je za homogen štap konstanta, a inče je funkcija od x. Kontaktna sila q_x na $D(x)$ dobiva se integracijom izraza (21) po presjeku (zbog male deformacije svi integrali uzimaju se po nedeformiranom štapu):

$$q_x(x) = \iint\limits_{D(x)} E(u_x'(x) - u_z''(x)\,z - u_y''(x)\,y)\,dy\,dz =$$

$$= E(x)\,S(x)\,u_x'(x) - E(x)\,u_z''(x)\iint\limits_{D(x)} z\,dy\,dz - E(x)\,u_y''(x)\iint\limits_{D(x)} y\,dy\,dz, \tag{22}$$

gdje je $S(x)$ površina presjeka $D(x)$. Pretpostavljamo da je $S(x) > 0$ za svako $x \in [0, l]$. Pošto smo pretpostavili da se težišta poprečnih presjeka nalaze na centralnoj liniji, integrali na desnoj strani u (22) iščezavaju pa imamo

$$q_x = ESu_x'. \tag{23}$$

Spin $\vec{m}(x)$ je ukupni moment sile (21), što daje

$$\vec{m}(x) = \iint\limits_{D(x)} (y\vec{j} + z\vec{k}) \times E\vec{i}\,(u_x''(x) - u_z''(x)\,z - u_y''(x)\,y)\,dy\,dz =$$

$$= E(-u_z''(x)\,I_z(x) - u_y''(x)\,I_{yz}(x))\vec{j} + E(u_z''(x)\,I_{yz}(x) + u_y''(x)\,I_y(x))\vec{k}, \tag{24}$$

---

* x-komponentu jednadžbe (15) ne pišemo jer se odnosi na torziju, koja se po pretpostavci 15.3 zanemaruje.

gdje je

$$I_y(x) = \iint\limits_{D(x)} y^2 \,\mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \tag{25}$$

$$I_z(x) = \iint\limits_{D(x)} z^2 \,\mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \tag{26}$$

$$I_{yz}(x) = \iint\limits_{D(x)} yz \,\mathrm{d}y\, \mathrm{d}z. \tag{27}$$

U daljnjem ćemo pretpostavljati da se koordinatne osi y i z mogu odabrati tako da je

$$I_{yz}(x) = 0 \tag{28}$$

za sve $x \in [0, l]$. Taj uvjet je ispunjen za cilindrični i rotacioni štap (v. zadatak 15.1.1). Uz (28) iz (24) izlazi

$$m_z = EI_y u_y'', \tag{29}$$

$$m_y = -E I_z u_z''. \tag{30}$$

Uvrštavajući (29) i (30) u (20) odnosno (19), dobivamo

$$q_y = -(E I_y u_y'')' - s_z, \tag{31}$$

$$q_z = -(E I_z u_z'')' + s_y. \tag{32}$$

Jednadžbe (23), (29)—(32) su *zakoni ponašanja* za štap. Iz (16)—(18) i zakona (23), (31) i (32) izlazi

$$(ESu_x')' + f_x = 0, \tag{33}$$

$$-(E I_y u_y'')'' - s_z' + f_y = 0, \tag{34}$$

$$-(E I_z u_z'')'' + s_y' + f_z = 0. \tag{35}$$

To su *jednadžbe ravnoteže* štapa. Jednadžba (33) je neovisna o drugim dvjema i opisuje *uzdužnu deformaciju* koju smo razmatrali ranije (zadatak 1.2.1). U daljnjem promatramo samo jednadžbe (34) i (35), koje opisuju *poprečnu deformaciju* (*progib* štapa je $u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$). One su također neovisne (to je posljedica pretpostavke (28)) i istog su tipa. Zato možemo bez gubitka općenitosti pretpostavljati da se štap progiba, na primjer, u ravnini xy. Uvodeći kraće oznake,

$$u = u_y,\ q = q_y,\ m = m_z,\ f = f_y,\ s = s_z,\ A = E I_y, \tag{36}$$

odgovarajuće jednadžbe (31), (29) i (34) pišemo u obliku

$$q = -(Au'')' - s, \tag{37}$$

$$m = Au'', \tag{38}$$

$$(Au'')'' = f - s'. \tag{39}$$

Ako se štap nalazi u *elastičnom sredstvu* s *koeficijentom elastičnosti* $b(x) > 0$, umjesto (39) imamo

$$(Au'')'' + bu = f - s'. \tag{40}$$

To je *obična linearna diferencijalna jednadžba četvrtog reda.* Funkcija koja zadovoljava jednadžbu (40) zove se *ravnotežni pregib.*

U daljnjem pretpostavljamo da je $s = 0$, jer je to redovit slučaj (za izuzetak v. zadatak 20.3.2).

15.4. Zadaci

15.4.1. Dokažite da je u slučaju cilindričnog i rotacionog štapa moguće odabrati osi y i z tako da vrijedi (28).

Rješenje. Ako je štap rotacionog oblika, onda je $D(x)$ krug pa je $I_{yz}(x) = 0$ za svaki izbor koordinatnih osi y, z i za svako $x \in [0, l]$. Ako je štap cilindričan, onda je $D(x)$ isto područje za svako x pa je $I_{yz} = const.$ Prijelaz na bilo koji drugi sustav (y', z') dan je transformacijom

$$y' = y\cos\varphi - z\sin\varphi, \tag{41}$$

$$z' = y\sin\varphi + z\cos\varphi. \tag{42}$$

U novom sustavu imamo

$$I_{y'z'} = \iint_{D'} y'\, z'\, dy'\, dz', \tag{43}$$

gdje je D' transformirano područje D. Uzimajući u obzir da je Jacobijan transformacije (41), (42) jednak 1, dobivamo

$$I_{y'z'} = \iint_{D} \left(yz\cos 2\varphi + \frac{y^2 - z^2}{2}\sin 2\varphi \right) dy\, dz. \tag{44}$$

Izborom

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \tag{45}$$

izlazi $I_{y'z'} = 0$; taj izbor je očigledno neovisan o x.

15.4.2. Izvedite *jednadžbu poprečne ravnoteže* štapa uz pretpostavku da na njega djeluje *velika longitudinalna sila.*

Rješenje. Ako na štap djeluje velika vanjska longitudinalna sila, onda je $q_x = a$ veliko (a dobiva se rješavanjem jednadžbe (33) uz zadane longitudinalne rubne uvjete). U tom slučaju aproksimacija (14) nije opravdana, jer $\vec{q}$ ima veliku uzdužnu komponentu. Pretpostavivši da je

$$\vec{R}' \times \vec{q} = (\vec{i} + u_y'\vec{j}) \times (a\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}) \approx q_y\vec{k} - q_z\vec{j} - au_y'\vec{k}, \tag{46}$$

iz (13) dobivamo (uz oznake (36))

$$q = -m' + au' = -(Au'')' + au'. \tag{47}$$

Umjesto (39) imamo

$$(Au'')'' - (au')' = f. \tag{48}$$

§ 16. Rubni problemi za štap

Kod štapa imamo dvije *geometrijske* veličine (*progib* i *rotaciju*) i dvije *dinamičke* veličine (*silu* i *moment*), pa će izbor rubnih uvjeta biti bogatiji nego kod žice. Na svakom kraju možemo zadati ili obje geometrijske veličine, ili obje dinamičke veličine, ili jednu geometrijsku veličinu (progib odnosno rotaciju) i jednu dinamičku veličinu (moment odnosno silu). Uvjet u kojem se zadaje progib odnosno rotacija zove se *geometrijski*, *kinematički* ili *Dirichletov*, a uvjet u kojem se zadaje moment odnosno sila zove se *prirodni*, *dinamički* ili *Neumannov*. Ako je zadana vrijednost geometrijske odnosno dinamičke veličine jednaka nuli, uvjet je *homogen*, inače je *nehomogen*. U daljnjem promatrano samo homogene uvjete, jer i ovdje vrijedi *princip superpozicije* pa se rubni uvjeti mogu *homogenizirati*.

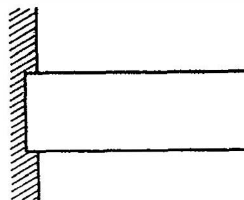
Ako je $u(0) = 0$ odnosno $\omega(0) = 0$, kažemo da je kraj $x = 0$ *učvršćen na progib odnosno učvršćen na rotaciju*; ako je $q(0) = 0$ odnosno $m(0) = 0$, kažemo da je kraj $x = 0$ *slobodan na progib odnosno slobodan na rotaciju.*

U primjerima koji slijede opisani su najinteresantniji slučajevi rubnih uvjeta; uzimamo kraj $x = 0$.

16.1. Primjer

Kraj je *ukliješten* (to jest učvršćen na progib i na rotaciju, sl. 1):

$$u(0) = 0, \ \omega(0) = u'(0) = 0. \tag{1}$$

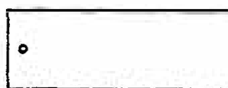


Slika 1.

16.2. Primjer

Kraj je *slobodan* (tj. slobodan i na progib i na rotaciju):

$$q(0) = -(Au'')'(0) = 0, \ m(0) = (Au'')(0) = 0. \tag{2}$$



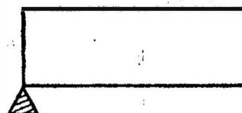
Slika 2.

16.3. Primjer

Kraj je učvršćen *šarkom* (tj. učvršćen na progib i slobodan na rotaciju sl. 2):

$$u(0) = 0, m(0) = (Au'')(0) = 0. \tag{3}$$

Često se efekt šarke postiže (kod *jednostrano* opterećenih štapova) *slobodnim osloncem* (sl. 3, v. zadatak 16.10.5).

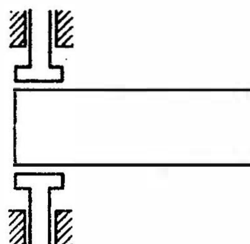


Slika 3.

16.4. Primjer

Kraj je *užlijebljen* (to jest učvršćen na rotaciju i slobodan na progib sl. 4):

$$\omega(0) = u'(0) = 0, q(0) = -(Au'')'(0) = 0. \tag{4}$$



Slika 4.

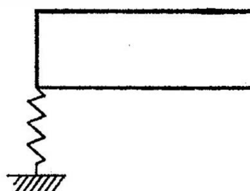
16.5. Primjer

Kraj je *elastično vezan na progib i slobodan na rotaciju*:

$$-q(0) = -\varkappa_1 u(0), \ m(0) = 0 \ (\varkappa_1 > 0) \tag{5}$$

ili ekvivalentno

$$(Au'')'(0) + \varkappa_1 u(0) = 0, \ u''(0) = 0. \tag{6}$$



Slika 5.

Takav uvjet može se ostvariti vezanjem kraja na elastično pero (sl. 5).

16.6. Primjer

Kraj je *učvršćen na progib*,

$$u(0) = 0, \tag{7}$$

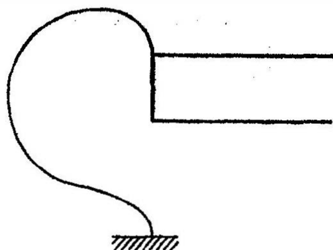
i elastično vezan na rotaciju:

$$-m(0) = -\varkappa_2\, \omega(0) \tag{8}$$

ili, ekvivalentno

$$(Au'')(0) - \varkappa_2\, u'(0) = 0. \tag{9}$$

Takav uvjet može se ostvariti šarkom i kružnim perom (sl. 6).



Slika 6.

Rubni problem za štap sastoji se u određivanju funkcije u koja zadovoljava jednadžbu ravnoteže (15.40) i rubne uvjete na krajevima.

Budući da je jednadžba (15.40) četvrtog reda, očekujemo veći stupanj glatkoće rješenja nego kod žice. *Pretpostavljat ćemo*

$$A \in \mathscr{H}^2(0, l),\ b \in \mathscr{H}^0(0, l),\ f \in \mathscr{H}^0(0, l). \tag{10}$$

Pod *rješenjem* jednadžbe (15.40) na segmentu $[0, l]$ razumijevat ćemo funkciju $u \in \mathscr{H}^4(0, l)$, koja u svakoj točki $x \in [0, l]$ u kojoj ima 4. derivaciju zadovoljava jednakost (15.40). Svako rješenje jednadžbe (15.40) na segmentu $[0, 1]$ ima 4. derivaciju u svakoj točki u kojoj su funkcije A'', b i f neprekidne (v. Dodatak, § 2). Precizna *postavka rubnog problema* glasi ovako: *Odrediti funkciju* $u \in \mathscr{H}^4(0, l)$ koja *je rješenje jednadžbe* (15.40) *na segmentu* $[0, l]$ *i koja zadovoljava rubne uvjete.*

Razmotrimo pitanje *jedinstvenosti* rješenja rubnog problema za štap. Zbog principa superpozicije dovoljno je analizirati homogeni problem, tj. homogenu jednadžbu

$$(Au'')'' + bu = 0 \tag{11}$$

uz homogene rubne uvjete. Ako taj problem ima samo trivijalno rješenje $u = 0$, nehomogeni problem ima najviše jedno rješenje; u protivnom za nehomogeni problem jedinstvenost ne vrijedi.

Pomnožimo jednadžbu (11) sa u i integrirajamo od 0 do l:

$$\int_0^l (Au'')''\, u\, \mathrm{d}x + \int_0^l bu^2\, \mathrm{d}x = 0. \tag{12}$$

Prvi član na lijevoj strani transformirajmo parcijalnom integracijom:

$$\int_0^l (Au'')'' u \, \mathrm{d}x = \int_0^l Au''^2 \, \mathrm{d}x + (Au'')' (l) u (l) - (Au'')' (0) u (0) -$$

$$- (Au'') (l) u' (l) + (Au'') (0) u' (0). \tag{13}$$

Iz (12) i (13) izlazi

$$\int_0^l (Au''^2 + bu^2) \, \mathrm{d}x + (Au'')' (l) u (l) - (Au'')' (0) u (0) -$$

$$- (Au'') (l) u' (l) + (Au'') (0) u' (0) = 0. \tag{14}$$

Sad treba uvažiti rubne uvjete. Razmotrit ćemo tri karakteristična slučaja.

16.7. Primjer

Kraj $x = 0$ uklij̈ešten, a kraj $x = l$ slobodan:

$$u (0) = u' (0) u'' (l) = (Au'')' (l) = 0. \tag{15}$$

Iz (14) i (15) slijedi

$$\int_0^l (Au''^2 + bu^2) \, \mathrm{d}x = 0. \tag{16}$$

Zbog $A > 0$ i $b \geq 0$ imamo

$$u'' = 0, \tag{17}$$

$$u = C_1 x + C_2, \tag{18}$$

gdje su C_1 i C_2 konstante; iz (15) dobivamo $C_1 = C_2 = 0$, $u = 0$.

16.8. Primjer

Na oba kraja šarke:

$$u (0) = u'' (0) = u (l) = u'' (l) = 0. \tag{19}$$

Iz (14) i (19) dobivamo opet $u = 0$.

16.9. Primjer

Oba kraja slobodna na progib i elastično vezana na rotaciju:

$$(Au'')'(0) = (Au'')'(l) = 0, \tag{20}$$

$$(Au'')(0) - \varkappa_2 u'(0) = 0, \; (Au'')(l) + \varkappa_2' u'(l) = 0, \; \varkappa_2, \varkappa_2' > 0. \tag{21}$$

Iz (14, (20) i (21) dobivamo

$$\int_0^l (Au''^2 + bu^2)\,\mathrm{d}x + \varkappa_2 u'^2(0) + \varkappa_2' u'^2(l) = 0. \tag{22}$$

Iz toga zaključujemo da vrijedi (18) i

$$bu^2 = 0, \tag{23}$$

$$u'(0) = u'(l) = 0. \tag{24}$$

Ako je $b \neq 0$, onda zbog (23) u iščezava na nekom intervalu pa je $C_1 = C_2 = 0$, tj. $u = 0$. Ako je $b = 0$, onda iz (24) slijedi $C_1 = 0$, to jest $u = C_2$; u tom slučaju rješenje je, dakle, određeno do na *kruti pomak.*

Lako se provjerava ovo *pravilo*:

U slučaju $b \neq 0$ rubni problem ima najviše jedno rješenje. U slučaju $b = 0$ rubni problem ima najviše jedno rješenje ako i samo ako su barem dva rubna uvjeta geometrijska, od kojih barem jedan sadrži progib.

Kao i kod žice, u slučaju nejedinstvenosti rješenja postoje *nužni uvjeti za postojanje rješenja.* Integrirajući jednadžbu

$$(Au'')'' = f \tag{25}$$

d 0 do l, dobivamo

$$(Au'')'(1) - (Au'')'(0) = \int_0^l f\,\mathrm{d}x. \tag{26}$$

Ako je, na primjer, $q(0) = -(Au'')'(0) = 0$, $q(l) = -(Au'')'(l) = 0$, iz (26) slijedi

$$\int_0^l f\,\mathrm{d}x = 0. \tag{27}$$

Pomnožimo li (25) sa x i integriramo od 0 do l, dobivamo

$$l(Au'')'(l) - (Au'')(l) + (Au'')(0) = \int_0^l xf\,\mathrm{d}x. \tag{28}$$

Ako je, na primjer, $m(0) = (Au'')(0) = 0$, $m(l) = (Au'')(l) = 0$, $q(l) = -(Au'')'(l) = 0$, iz (28) slijedi

$$\int_0^l xf\,\mathrm{d}x = 0. \tag{29}$$

16.10. Zadaci

16.10.1. Pretpostavljajući $A = 1$ provedite homogenizaciju rubnih uvjeta

$$u''(0) = m_0, -u'''(0) = q_0, u(l) = u'(l) = 0. \tag{30}$$

Rješenje. Neka je $h(x)$ polinom 3. stupnja koji zadovoljava uvjet (30). Zbog uvjeta u $x = l$ imamo

$$h(x) = \alpha(x-l)^2 + \beta(x-l)^3, \tag{31}$$

a zbog uvjeta u $x = 0$ vrijedi

$$2\alpha - 6l\beta = m_0, \tag{32}$$

$$-6\beta = q_0. \tag{33}$$

Iz toga se jednoznačno određuju α i β. Rješenje problema bit će

$$u = v + h, \tag{34}$$

gdje je v rješenje problema

$$v^{(iv)} + bv = f - bh, \tag{35}$$

$$v''(0) = v'''(0) = v(l) = v'(l) = 0. \tag{36}$$

16.10.2. Riješite rubni problem za štap u slučaju $b = 0$ uz ove rubne uvjete:

(*i*) oba kraja učvršćena šarkama;
(*ii*) oba kraja ukliještena;
(*iii*) lijevi kraj ukliješten, desni slobodan;
(*iv*) lijevi kraj ukliješten, desni učvršćen šarkom.

Rješenje. Iz (15.40) dobivamo

$$(Au'')'(x) = \int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C_1, \tag{37}$$

$$(Au'')(x) = \int_0^x \mathrm{d}\eta \int_0^\eta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C_1 x + C_2 = \int_0^x (x-\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C_1 x + C_2, \tag{38}$$

$$u'(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\eta}{A(\eta)} \int_0^\eta (\eta-\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C_1 \int_0^x \frac{\eta\,\mathrm{d}\eta}{A(\eta)} + C_2 \int_0^x \frac{\mathrm{d}\eta}{A(\eta)} + C_3, \tag{39}$$

$$u(x) = \int_0^x \frac{x-\eta}{A(\eta)} \mathrm{d}\eta \int_0^\eta (\eta - \xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi + C_1 \int_0^x \frac{(x-\eta)\eta}{A(\eta)} \mathrm{d}\eta +$$

$$+ C_2 \int_0^x \frac{x-\eta}{A(\eta)} \mathrm{d}\eta + C_3 x + C_4, \tag{40}$$

gdje su $C_1, \ldots, C_4$ konstante.

(*i*) Iz

$$u''(0) = u(0) = 0, \tag{41}$$

$$u''(l) = u(l) = 0 \tag{42}$$

dobivamo

$$C_2 = C_4 = 0, \tag{43}$$

$$C_1 = \frac{L - lF}{l}, \tag{44}$$

$$C_3 = -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{l-\eta}{A(\eta)} \mathrm{d}\eta \int_0^\eta (\eta - \xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi + \frac{lF - L}{l^2} \int_0^l \frac{l-\eta}{A(\eta)} \eta \, \mathrm{d}\eta, \tag{45}$$

gdje je

$$F = \int_0^l f(x) \mathrm{d}x, \; L = \int_0^l x f(x) \mathrm{d}x. \tag{46}$$

(*ii*) Iz

$$u'(0) = u(0) = 0, \tag{47}$$

$$u'(l) = u(l) = 0 \tag{48}$$

dobivamo

$$C_3 = C_4 = 0, \tag{49}$$

dok se C_1 i C_2 dobivaju kao rješenje linearnog sustava

$$a_{11} C_1 + a_{12} C_2 = b_1 \tag{50}$$

$$a_{21} C_1 + a_{22} C_2 = b_2, \tag{51}$$

gdje je

$$a_{11} = \int_0^l \frac{x \mathrm{d}x}{A(x)}, a_{12} = \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{A(x)}, \tag{52}$$

$$a_{21} = \int_0^l \frac{x(l-x)}{A(x)}\,\mathrm{d}x, \quad a_{22} = \int_0^l \frac{l-x}{A(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{53}$$

$$b_1 = \int_0^l \frac{\mathrm{d}y}{A(y)} \int_0^y (x-y) f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{54}$$

$$b_2 = \int_0^l \frac{l-y}{A(y)}\,\mathrm{d}y \int_0^y (x-y) f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{55}$$

Za determinantu tog sustava imamo

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{1}{2}\int_0^l \int_0^l \frac{(x-y)^2}{A(x)\,A(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq (\max_{x\in[0,l]} A(x))^{-2}\frac{l^4}{12} > 0, \tag{56}$$

pa su C_1 i C_2 jednoznačno određeni.

(*iii*) Iz

$$u'(0) = u(0) = 0, \tag{57}$$

$$(Au'')'(l) = u''(l) = 0 \tag{58}$$

dobivamo

$$C_3 = C_4 = 0, \tag{59}$$

$$C_1 = -F, \tag{60}$$

$$C_2 = L. \tag{61}$$

(*iv*) Iz (47) dobivamo (49), a iz (42)

$$C_1 = M\int_0^l \frac{l-y}{A(y)}\,\mathrm{d}y\,(y\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x + \int_y^l \xi f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - lF), \tag{62}$$

$$C_2 = -l\,C_1 + L - lF, \tag{63}$$

gdje je

$$M = \left(\int_0^l \frac{(l-x)^2}{A(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{-1}. \tag{64}$$

16.10.3. Pokažite da su *uvjeti* (27) *i* (29) *dovoljni za postojanje rješenja* rubnog problema u slučaju kad su svi rubni uvjeti dinamički i $b = 0$.

Rješenje. Iz $(Au'')'(0) = 0$ i (37) dobivamo $C_1 = 0$. Iz $(Au'')(0) = 0$ i (38) dobivamo $C_2 = 0$. Formula (40) daje rješenje do na progib $C_3x + C_4$, gdje su C_3 i C_4 proizvoljne konstante.

16.10.4. Odredite maksimalnu (apsolutnu) vrijednost kontaktne sile i kontaktnog momenta teškoga homogenog štapa čiji su krajevi (*i*) učvršćeni šarkama, (*ii*) ukliješteni.

Rješenje. (*i*) Prema (37), (38), (43) i (44) dobivamo

$$q(x) = -(Au'')'(x) = -\varrho g\left(x - \frac{l}{2}\right), \tag{65}$$

$$m(x) = (Au'')(x) = \frac{\varrho g}{2}x^2 - \frac{\varrho g l}{2}x. \tag{66}$$

q postiže maksimum za $x = 0$ i $x = l$,

$$|q|_{max} = \frac{\varrho g l}{2}; \tag{67}$$

$|m|$ postiže maksimum za $x = \frac{l}{2}$,

$$|m|_{max} = \frac{\varrho g l^2}{8}. \tag{68}$$

(*ii*) Prema (37), (38) i (50)—(55) dobivamo

$$q(x) = -(Au'')'(x) = -\varrho g\left(x - \frac{l}{2}\right), \tag{69}$$

$$m(x) = \frac{\varrho g x^2}{2} - \frac{\varrho g l}{2}x + \frac{\varrho g l^2}{12}. \tag{70}$$

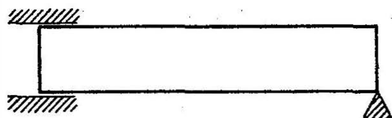
$|q|$ postiže maksimum za $x = 0$ i $x = l/2$,

$$|q|_{max} = \frac{\varrho g l}{2}; \tag{71}$$

$|m|$ postiže maksimum za $x = l/2$,

$$|m|_{max} = \frac{\varrho g l^2}{24}. \tag{72}$$

16.10.5. Postavite i uz pretpostavku $b = 0$ riješite problem ravnoteže štapa koji je na lijevom kraju ukliješten, a na desnom *slobodno oslonjen* (sl. 7).



Slika 7.

Rješenje. Uvjeti na lijevom kraju su

$$u(0) = u'(0) = 0. \tag{73}$$

Za oslonjeni kraj postoje u ravnoteži dvije mogućnosti: ili je on u kontaktu s osloncem ili nije. U prvom slučaju je $u(l) = 0$, $q(l) \geq 0$; u drugom slučaju je $u(l) > 0$, $q(l) = 0$. U obama slučajevima je $m(l) = 0$. Prema tome u svakom slučaju je

$$u''(l) = 0, \tag{74}$$

$$u(l) \geq 0, \ (Au'')'(l) \leq 0, \ u(l)(Au'')'(l) = 0. \tag{75}$$

Uvjeti (75) su *jednostrani* i oni su *nelinearni*. Moramo razmotriti dvije mogućnosti.

(*i*) $(Au'')'(l) = 0$. Kraj je tada slobodan pa je rješenje dano formulama (40), (59)—(61). Nužno je $u(l) \geq 0$, iz čega dobivamo

$$\int_0^l \frac{l-y}{A(y)} \mathrm{d}y \int_y^l (x-y) f(x) \, \mathrm{d}x \geq 0. \tag{76}$$

(*ii*) $u(l) = 0$. Kraj zadovoljava uvjete šarke, pa je rješenje dano formulama (40), (62)—(64). Nužno je $(Au'')'(l) \leq 0$, iz čega dobivamo

$$\int_0^l \frac{l-y}{A(y)} \mathrm{d}y \int_y^l (x-y) f(x) \, \mathrm{d}x \leq 0. \tag{77}$$

Vidimo da o tome koja će od dviju mogućnosti biti na kraju $x = l$ realizirana odlučuje izraz na lijevoj strani u (76) odnosno (77). Dovoljan uvjet da vrijedi (76) odnosno (77) je, na primjer, nenegativnost odnosno nepozitivnost ove funkcije (varijable y):

$$\int_y^l (x-y) f(x) \, \mathrm{d}x = \int_y^l x f(x) \, \mathrm{d}x - y \int_y^l f(x) \, \mathrm{d}x. \tag{78}$$

§ 17. Greenova funkcija i rješenje rubnog problema za štap

Razmatrat ćemo rubni problem za štap *pretpostavljajući da odgovarajući homogeni problem ima samo trivijalno rješenje.* Prema § 16 to je ekvivalentno pretpostav-

ci *da je ili* $b \neq 0$ *ili da su bar dva rubna uvjeta geometrijska*, od kojih bar jedan sadrži progib.

Označimo sa $F(x)$ vanjsku linijsku silu koja djeluje na komad $(0, x)$ štapa; tada na komad (x_1, x_2) djeluje linijska sila

$$F(x_2) - F(x_1). \tag{1}$$

Umjesto (15.10) dobivamo općenitiji zakon ravnoteže

$$(Au'')'(x_2) - (Au'')'(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} bu \, dx = F(x_2) - F(x_1). \tag{2}$$

Kao i u slučaju žice (§ 8), jedinična sila *koncentrirana* u točki $x' \in (0, l)$ je funkcija

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x' \\ 1, & x \geq x'. \end{cases} \tag{3}$$

Uz takvu silu iz (2) kao i prije dobivamo

$$(A(x)\, u''(x))'' + b(x)\, u(x) = 0 \text{ za } x \neq x'. \tag{4}$$

Pretpostavimo da su u točki x' neprekidni progib, rotacija i moment, to jest funkcija u i njezina 1. i 2. derivacija:

$$u(x' + 0) - u(x' - 0) = 0, \tag{5}$$

$$u'(x' + 0) - u'(x' - 0) = 0 \tag{6}$$

$$u''(x' + 0) - u''(x' - 0) = 0. \tag{7}$$

Iz (2) i (7) slijedi da 3. derivacija funkcije u (kontaktna sila) ima u točki x' skok:

$$u'''(x' + 0) - u'''(x' - 0) = \frac{1}{A(x')}. \tag{8}$$

Funkciju $u(x)$ koja za dano $x' \in (0, l)$ zadovoljava uvjete (4)—(8) i zadane rubne uvjete označimo sa $G(x, x')$; ako ovdje i x' smatramo varijablom, dobivamo *Greenovu funkciju* za štap.

17.1. Primjer

Odredimo Greenovu funkciju u slučaju $A = 1$ i $b = 0$, ako je lijevi kraj štapa ukliješten, a desni slobodan. Imamo ove uvjete:

$$\frac{\partial^4 G(x, x')}{\partial x^4} = 0, \; x \neq x' \tag{9}$$

$$G(x' + 0\, x') - G(x' - 0, x') = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial G(x' + 0, x')}{\partial x} - \frac{\partial G(x' - 0, x')}{\partial x} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 G(x' + 0, x')}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G(x' - 0, x')}{\partial x^2} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial^3 G(x' + 0, x')}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 G(x' - 0, x')}{\partial x^3} = 1. \tag{13}$$

$$G(0, x') = \frac{\partial G(0, x')}{\partial x} = \frac{\partial^2 G(l, x')}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 G(l, x')}{\partial x^3} = 0. \tag{14}$$

Iz (9) slijedi

$$G(x, x') = \begin{cases} C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3, & x \leq x' \\ D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3, & x \geq x', \end{cases} \tag{15}$$

gdje su C_i i D_i ($i = 0, \ldots, 3$) funkcije od x'. Neka je

$$C_i - D_i = B_i, \; i = 0, \ldots, 3. \tag{16}$$

Iz (10)—(13) slijedi

$$B_0 + B_1 x' + B_2 x'^2 + B_3 x'^3 = 0 \tag{17}$$

$$B_1 + 2\, B_2 x' + 3\, B_3 x'^2 = 0 \tag{18}$$

$$B_2 + 3\, B_3 x' = 0 \tag{19}$$

$$6\, B_3 = -1. \tag{20}$$

Iz toga dobivamo

$$B_0 = \frac{1}{6} x'^3, \; B_1 = -\frac{1}{2} x'^2, \; B_2 = \frac{1}{2} x', \; B_3 = -\frac{1}{6}. \tag{21}$$

Iz (14) i (21) slijedi

$$D_0 = -\frac{1}{6} x'^3, \; D_1 = \frac{1}{2} x'^2, \; D_2 = 0, \; D_3 = 0. \tag{22}$$

Iz (16) dobivamo

$$C_0 = 0, \; C_1 = 0, \; C_2 = \frac{1}{2} x', \; C_3 = -\frac{1}{6}. \tag{23}$$

Prema tome je

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{1}{6} x^2 (3x' - x), & x \leq x' \\ \frac{1}{6} x'^2 (3x - x'), & x \geq x'. \end{cases} \tag{24}$$

Funkcija (24) je *simetrična*, to jest vrijedi

$$G(x, x') = G(x', x) \text{ za } x, x' \in (0, l); \tag{25}$$

ona je također *pozitivna*:

$$G(x, x') > 0 \text{ za } x, x' \in (0, l). \tag{26}$$

Svojstva (25) i (26) ima Greenova funkcija i u *općem slučaju.*

Uz pretpostavku jedinstvenosti i uz homogene rubne uvjete rješenje rubnog problema za štap dano je formulom

$$u(x) = \int_0^l G(x, x') f(x') \, dx'. \tag{27}$$

Precizna *definicija Greenove funkcije* za štap potpuno je analogna onoj u slučaju žice (§ 9). Posebno, *pretpostavlja se da za svako* $x' \in (0, l)$ *vrijedi*

$$G(\cdot, x') \in \mathscr{H}^3(0, l) \cap \mathscr{H}^4(0, x') \cap \mathscr{H}^4(x', l). \tag{28}$$

Prelazimo na *konstrukciju Greenove funkcije u općem slučaju.* Primijetimo najprije da rubne uvjete za štap možemo zapisati u obliku

$$U_i(u) = \sum_{j=0}^{3} \alpha_{ij} u^{(j)}(0) + \beta_{ij} u^{(j)}(l) = 0, \; i = 0, 1, 2, 3, \tag{29}$$

gdje su α_{ij} i β_{ij} zadani brojevi. Prema § 16 za uvjete na lijevom odnosno desnom kraju je $\beta_{ij} = 0$ odnosno $\alpha_{ij} = 0$. Međutim, za konstrukciju koja slijedi takve pretpostavke nisu nužne, pa naše daljnje zaključivanje vrijedi za rubne uvjete mnogo općenitije nego one koje smo naveli u § 16. Pretpostavit ćemo da homogeni problem

$$(Au'') + bu = 0 \tag{30}$$

$$U_i(u) = 0, \; i = 0, 1, 2, 3 \tag{31}$$

ima samo trivijalno rješenje $u = 0$. Neka su u_k, $k = 0, 1, 2, 3$, linearno nezavisna rješenja jednadžbe (30) na intervalu $(0, l)$; tada je matrica

$$(U_i(u_k))_{i,k} = 0, \ldots, 3 \tag{32}$$

regularna (inače bi postojala netrivijalna kombinacija rješenja u_k koja bi zadovoljavala uvjete (31), to jest postojalo bi netrivijalno rješenje problema (30), (31))*. Greenova funkcija je nužno oblika

$$G(x, x') = \begin{cases} \sum_{i=0}^{3} C_i u_i(x), & x \leq x' \\ \sum_{i=0}^{3} D_i u_i(x), & x \geq x', \end{cases} \tag{33}$$

gdje su C_i i D_i neke funkcije od $x' \in (0, l)$. Stavljajući

$$C_i - D_i = B_i \tag{34}$$

i uzimajući u obzir uvjete (5)—(8) dobivamo

$$\sum_{i=0}^{3} B_i u_i(x') = 0 \tag{35}$$

$$\sum_{i=0}^{3} B_i u_i'(x') = 0 \tag{36}$$

$$\sum_{i=0}^{3} B_i u_i''(x') = 0 \tag{37}$$

$$\sum_{i=0}^{3} B_i u_i'''(x') = -\frac{1}{A(x')}. \tag{38}$$

Uvjeti (29) daju

$$\sum_{k=0}^{3} U_i(u_k) D_k = -\sum_{k=0}^{3} \left(\sum_{j=0}^{3} a_{ij} u_k^{(j)}(0)\right) B_k, \; i = 0, \ldots, 3. \tag{39}$$

Uvjeti (35)—(39) predstavljaju sustav od osam linearnih jednadžba s osam nepoznanica B_i, D_i, $i = 0, \ldots, 3$. Pokazat ćemo da taj sustav ima jedinstveno rješenje. Determinanta sustava (35)—(38) je Wronskijan (linearno nezavisnih) rješenja $u_0, \ldots, u_3$ jednadžbe (30), pa se na segmentu $[0, l]$ nigdje ne poništava (v. Dodatak, § 2). Odatle slijedi da sustav (35)—(38) ima jedinstveno rješenje B_i, $i = 0, \ldots, 3$. Time (39) postaje sustav s nepoznanicama D_i, $i = 0, \ldots, 3$; njegova matrica (32) je regularna, pa on ima jedinstveno rješenje B_i, D_i, $i = 0, \ldots, 3$.

* Vrijedi i obrat: ako je za bilo koja četiri linearno nezavisna rješenja u_k, $k = 0, \ldots, 3$ jednadžbe (30) matrica (32) regularna, problem (30), (31) ima samo trivijalno rješenje $u = 0$; ako je rang te matrice jednak $r < 4$, problem ima 4-r linearno nezavisnih rješenja.

Iz (34) dobivamo C_i, $i = 0, \dots, 3$. Tako određena funkcija (33) zadovoljava sve uvjete koji se traže od Greenove funkcije. Rješenje sustava (35)—(38) lako nalazimo pomoću Cramerovog pravila; koristeći se još Liouvilleovom formulom (v. Dodatak, § 2), dobivamo

$$B_i = -\frac{W_i(x')\,A(x')}{A^2(0)\,W(0)}, \quad i = 0, \dots, 3, \tag{40}$$

gdje je $W_i(x')$ algebarski komplement elementa $u_i(x''')$ u determinanti $W(x') = W(u_0, \dots, u_3; x')$; bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$A^2(0)\,W(0) = -1, \tag{41}$$

pa dobivamo

$$B_i = A(x')\,W_i(x'). \tag{42}$$

Iz toga slijedi da je

$$B_i, C_i, D_i \in \mathscr{H}^2(0, l), \quad i = 0, \dots, 3. \tag{43}$$

Dokazat ćemo još formulu (27). Prema (33) imamo

$$u(x) = \sum_{i=0}^{3} u_i(x) \left(\int_0^x D_i(x') f(x')\,dx' + \int_x^l C_i(x') f(x')\,dx' \right). \tag{44}$$

Neka je $x \in [0, l]$ točka neprekidnosti funkcija A'', b i f. Uzimajući u obzir uvjete (35)—(38), iz (44) dobivamo

$$(Au'')''(x) = \sum_{i=0}^{3} (A\,u_i'')''(x) \left(\int_0^x D_i(x') f(x')\,dx' + \right.$$

$$\left. + \int_x^l C_i(x') f(x')\,dx' \right) + f(x). \tag{45}$$

Zbog jednakosti

$$(Au_i'')''(x) = -b(x)\,u_i(x), \quad i = 0, \dots, 3 \tag{46}$$

iz (45) slijedi

$$(Au'')''(x) + b(x)\,u(x) = f(x). \tag{47}$$

Dalje imamo

$$U_i(u) = \int_0^l U_i(G(\cdot, x'))\,f(x')\,dx' = 0, \tag{48}$$

jer je $U_i(G(.\,, x')) = 0$ za svako $x' \in (0, l)$.

Rezultati ovog paragrafa prenose se s nebitnim promjenama na *rubni problem za linearnu diferencijalnu jednadžbu n-tog reda* ($n \geq 2$)

$$a_0(x)\, u^{(n)}(x) + a_1(x)\, u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, u(x) = f(x) \qquad (49)$$

na segmentu $[0, l]$; ovdje su a_0, $a_1, \ldots, a_n$ i f zadane, a u nepoznata funkcija. Pretpostavlja se

$$a_0(x) \neq 0 \text{ za } x \in [0, l]. \qquad (50)$$

Rubni uvjeti za jednadžbu (49) glase

$$U_i(u) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}\, u^{(j)}(0) + \beta_{ij}\, u^{(j)}(l) = 0, i = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (51)$$

17.2. Zadatak

Dokažite *korektnost* rubnog problema za štap.

Rješenje. Iz (27) slijedi

$$|u(x) \leq \max_{x\in[0,l]} |f(x)| \max_{x\in[0,l]} \int_0^l |G(x, x')|\, dx', \qquad (52)$$

$$|u'(x)| \leq \max_{x\in[0,l]} |f(x)| \max_{x\in[0,l]} \int_0^l \left| \frac{\partial G(x, x')}{\partial x} \right| dx', \qquad (53)$$

$$|u''(x)| \leq \max_{x\in[0,l]} |f(x)| \max_{x\in[0,l]} \int_0^l \left| \frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial x^2} \right| dx'. \qquad (54$$

§ 18. Varijaciona jednadžba i funkcional energije za štap

Varijaciona i energetska formulacija rubnih uvjeta za štap dobiva se na isti način kao u slučaju žice. Zato se ograničujemo na izvođenje osnovnih formula, a dokaze prepuštamo čitatelju. Također se ograničujemo na rubne uvjete

$$u(0) = u'(0) = 0 \qquad (1)$$

$$u''(l) = (Au'')'(l) = 0; \qquad (2)$$

postupak je isti i u drugim slučajevima (u kojima je rješenje jedinstveno). Za funkciju v na segmentu $(0, l)$ kažemo da je *dozvoljena* ako zadovoljava zadane (homoge

ne) geometrijske uvjete rubnog problema*; u našem slučaju to znači $v(0) = v'(0) = 0$. Pomnožimo li jednadžbu (15.40) s takvom funkcijom, integriramo po segmentu $[0, l]$ i iskoristimo formulu (16.21) te uzimamo u obzir (1) i (2), zaključujemo da vrijedi

$$\int_0^l (Au'' v'' + buv - fv) \, dx = 0 \text{ za svako dozvoljeno } v. \tag{3}$$

Prema tome, *ako je funkcija u rješenje problema* (15.40), (1), (2), *ona zadovoljava varijacionu jednadžbu* (3). Pokazuje se da i ovdje vrijedi obrat: *Ako dozvoljena funkcija u zadovoljava varijacionu jednadžbu* (3), *ona je rješenje problema* (15.40), (1), (2).

Funkcional energije ima oblik

$$\Phi(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (A(w'')^2 + bw^2) \, dx - \int_0^l fw dx, \tag{4}$$

a promatra se *na dozvoljenim funkcijama w*. Pokazuje se da *rješenje u rubnog problema* (15.40), (1), (2) *minimizira funkcional energije* (4) (*na skupu dozvoljenih funkcija*) *i obratno*, da *funkcija u koja minimizira funkcional energije* (4) (*na skupu dozvoljenih funkcija*) *predstavlja rješenje rubnog problema* (15.40), (1), (2).

Gornja razmatranja prenose se bez bitnih promjena na *rubni problem za linearnu diferencijalnu jednadžbu reda* $2m$ ($m \geq 2$):

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k (a_k(x) u^{(m-k)}(x))^{(m-k)} = f(x). \tag{5}$$

U ovom slučaju *geometrijski* (*Dirichletovi*) rubni uvjeti su oni u kojima se pojavljuju derivacije funkcije u reda najviše $m - 1$; ostali rubni uvjeti su *prirodni* (*Neumannovi*).

18.1. Zadatak

Napišite varijacionu jednadžbu i funkcional energije za štap za ove slučajeve rubnih uvjeta:

(*i*) šarka na lijevom, a žlijeb na desnom kraju,

(*ii*) šarka na oba kraja,

(*iii*) lijevi kraj slobodan na progib i elastično vezan na rotaciju, a desni kraj slobodan na rotaciju i elastično vezan na progib.

Rješenje. (*i*) Dozvoljene funkcije: $v(0) = v'(l) = 0$; varijaciona jednadžba je (3), a funkcional energije (4). (*ii*) Dozvoljene funkcije: $v(0) = v(l) = 0$; varijaciona jednadžba je (3), a funkcional energije (4).

* Ovdje se pretpostavlja $v \in \mathscr{H}^2(0, l)$.

(*iii*) Dozvoljene su sve funkcije: varijaciona jednadžba:

$$\int_0^l (Au''v'' + buv)\,\mathrm{d}x = \int_0^l fv\,\mathrm{d}x - \varkappa_1\, u'(0)\, v'(0) + \varkappa_2\, u(l)\, v(l); \tag{6}$$

funkcional energije:

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l (Aw''^2 + bw^2)\,\mathrm{d}x - \int_0^l fw\mathrm{d}x + \frac{\varkappa_1}{2}(w'(0))^2 - \frac{\varkappa_2}{2}(w(l))^2. \tag{7}$$

§ 19. Metoda konačnih elemenata za štap

Pozabavit ćemo se *približnim rješavanjem* problema ravnoteže štapa. Izabrat ćemo tipične rubne uvjete

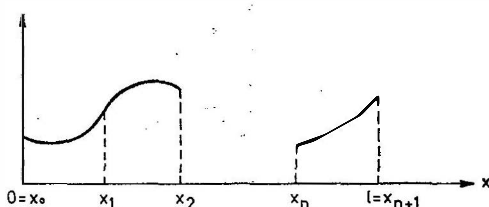
$$u(0) = u'(0) = 0 \tag{1}$$

$$u''(l) = (Au'')'(l) + s(l) = 0, \tag{2}$$

što odgovara varijacionom problemu: odrediti dozvoljenu funkciju u (to jest onu koja zadovoljava uvjete (1)) takvu da je

$$\int_0^l (Au''v'' + buv)\,\mathrm{d}x = \int_0^l (fv + sv')\,\mathrm{d}x \quad \textit{za svako dozvoljeno } v. \tag{3}$$

Razdijelit ćemo segment $[0, l]$ na $n + 1$ jednakih dijelova (duljine $h = l/(n + 1)$) *čvorovima* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (stavljamo $x_0 = 0$, $x_{n+1} = l$). Na žalost, ovdje nije moguće primijeniti skup V_n^1 iz § 14, jer se u (3) traži da u i v imaju konačne druge derivacije; to za funkcije iz V_n^1 općenito nije slučaj (funkcija φ_k ima u čvorovima x_{k-1}, x_k, x_{k+1} beskonačnu drugu derivaciju). Zato ćemo koristiti *po dijelovima kubične funkcije*. Funkcija w je *po dijelovima kubična za razdiobu* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ako je na svakom od diobenih intervala (x_{k-1}, x_k) *polinom* stupnja najviše 3 i ako je u svakom čvoru x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ neprekidna zajedno s derivacijom (sl. 1). Skup svih takvih funkcija označujemo sa $V_n^2(0, l)$ (kraće sa V_n^2). *Proizvoljna superpozicija funkcija iz* V_n^2 *jest funkcija iz* V_n^2*.



Slika 1.

* To znači da je V_n^2 *linearni prostor*. Očigledno je $V_n^2 \subset \mathscr{H}^2$ i $V_n^2 \subseteq\!\!\!/\; \mathscr{H}^4$.

Polinom stupnja 3 ima oblik

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \tag{4}$$

Za određivanje koeficijenata $a_0, \ldots, a_3$ potrebna su četiri podatka. Posebno, ti koeficijenti su jednoznačno određeni vrijednostima polinoma (4) i njegovih derivacija u dvjema različitim točkama (v. zadatak 19.1.1). Iz toga slijedi da je funkcija $w \in V_n^2$ potpuno određena vrijednostima $w(x_k)$ i $w'(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$.

Svakom čvoru x_k, $k = 0, 1, \ldots, n+1$ pridružit ćemo par funkcija Ψ_{2k}, $\Psi_{2k+1} \in V_n^2$, koje imaju ova svojstva:

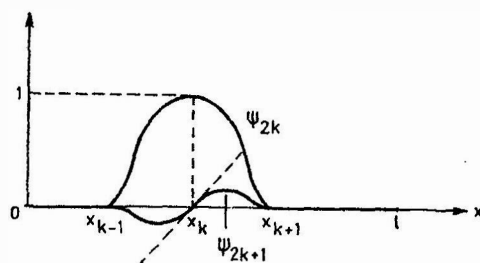
$$\Psi_{2k}(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}, \; \Psi'_{2k}(x_j) = 0 \text{ za svako } j, \tag{5}$$

$$\Psi_{2k+1}(x_j) = 0 \text{ za svako } j, \; \Psi'_{2k+1}(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \tag{6}$$

(sl. 2). Te funkcije su dane formulama

$$\Psi_{2k}(x) = \chi_0\left(\frac{x - x_k}{h}\right), \tag{7}$$

$$\Psi_{2k+1}(x) = h\,\chi_1\left(\frac{x - x_k}{h}\right), \tag{8}$$



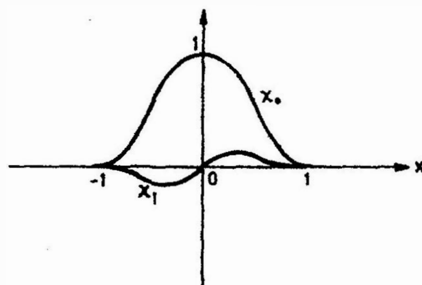
Slika 2.

gdje je

$$\chi_0(x) = \begin{cases} (|x| - 1)^2 (2|x| + 1), & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1], \end{cases} \tag{9}$$

$$\chi_1(x) = \begin{cases} x(|x| - 1)^2, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases} \tag{10}$$

(sl. 3). Funkcije Ψ_r, $r = 0, 1, \ldots, 2n+3$ zovu se *hermitski kubični elementi. Svaku funkciju $w \in V_n^2$ možemo prikazati kao superpoziciju funkcija Ψ_r:*



Slika 3.

$$w(x) = \sum_{r=0}^{2n+3} \alpha_r \Psi_r(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{2k} \Psi_{2k}(x) + \alpha_{2k+1} \Psi_{2k+1}(x), \tag{11}$$

gdje je

$$\alpha_{2k} = w(x_k), \ \alpha_{2k+1} = w'(x_k). \tag{12}$$

Zaista, zbog (5) i (6) funkcije na lijevoj i desnoj strani u (11) podudaraju se zajedno s derivacijama u svim čvorovima pa su jednake. Prikaz (10) je za funkciju $w \in V_n^2$ jedinstven, jer zbog (5) i (6) iz (11) slijedi (12). Dozvoljena funkcija $w \in V_n^2$ ima prikaz

$$w(x) = \sum_{r=2}^{2n+3} \alpha_r \Psi_r(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{2k} \Psi_{2k}(x) + \alpha_{2k+1} \Psi_{2k+1}(x). \tag{13}$$

Kažemo da je dozvoljena funkcija $\tilde{u} \in V_n^2$ približno rješenje problema (3) ako vrijedi

$$\int_0^l (A\tilde{u}''v'' + b\tilde{u}v)\, \mathrm{d}x = \int_0^l f\, v \mathrm{d}x \ \textit{za svako dozvoljeno } v \in V_n^2. \tag{14}$$

Funkcije $\tilde{u}$ i v pišemo u obliku

$$\tilde{u}(x) = \sum_{r=2}^{2n+3} \alpha_r \Psi_r(x), \tag{15}$$

$$v(x) = \sum_{r=2}^{2n+3} \beta_r \Psi_r(x), \tag{16}$$

pri čemu koeficijente α_r treba odrediti, a koeficijenti β_r su proizvoljni. Posve analogno kao u § 14 iz (14)—(16) dobivamo

$$\sum_{r=2}^{2n+3} C_{sr} \alpha_r = f_s, \ s = 2, 3, \ldots, 2n+3, \tag{17}$$

gdje je

$$C_{sr} = A_{sr} + b_{sr}, \tag{18}$$

$$A_{sr} = \int_0^l A\, \Psi_s'' \Psi_r''\, \mathrm{d}x, \ b_{sr} = \int_0^l b\, \Psi_s \Psi_r\, \mathrm{d}x, \tag{19}$$

$$f_s = \int_0^l f\, \Psi_s\, \mathrm{d}x; \tag{20}$$

$C = (C_{sr})$ je *matrica krutosti*. Sustav (17) sadrži $2n + 2$ linearnih jednadžba s isto toliko nepoznanica $\alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+3}$. Matrica C je *simetrična*. Ona je i *regularna**, pa sustav (17) ima jedno i samo jedno rješenje $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n+3})$. Pri tome je prema

* Matrica C je *pozitivno definitna*. Dokaz je posve analogan onom u § 14.

(12) $a_{2k} = \tilde{u}(x_k)$, $a_{2k+1} = \tilde{u}'(x_k)$, pa za problem (3) dobivamo aproksimaciju rješenja i njegovih derivacija u čvorovima $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$*.

Iz (19) lako zaključujemo da je C *sedamdijagonalna* (to jest da ima samo sedam dijagonala različitih od nule) i da ima ovu strukturu:

$$C = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & & & & & \\ \times & \times & \times & \times & & & & & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & & & \\ & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \\ & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \tag{21}$$

19.1. Zadatak

Dokažite da je polinom 3. stupnja određen svojim vrijednostima i vrijednostima svojih derivacija u dvjema različitim točkama.

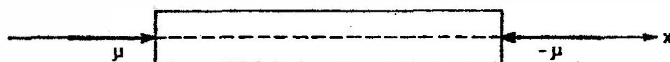
Rješenje. Neka je $P(x) = \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$, $Q(x) = \beta_0 x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$ i neka je $P(x_i) = Q(x_i)$, $P'(x_i) = Q'(x_i)$, $i = 1, 2$, gdje je $x_1 \neq x_2$. Tada za polinom $T = P - Q$ vrijedi $T(x_i) = T'(x_i) = 0$, $i = 1, 2$. Prema tome, x_1 i x_2 su dvostruke nultočke polinoma T koji je najviše 3. stupnja. Iz toga slijedi $T = 0$.

§ 20. Stabilnost štapa

Ako je uzdužno djelovanje na štap slabo, ono ne utječe na poprečni progib ($a = q_x$ ne ulazi u (15.37)—(15.39)). Ako je to djelovanje nenegativno, ono također ne izaziva poprečni progib. Negativna i po apsolutnoj vrijednosti dovoljno velika longitudinalna sila izaziva poprečni progib (*izvijanje* štapa). Proračun progiba u tom slučaju stvar je *nelinearne* teorije. Međutim, u sklopu linearne teorije, koristeći se modelom koji smo izveli u zadatku 15.1.2, moguće je proračunati pri kojoj longitudinalnoj sili će doći do izvijanja. Razmatranja su slična onima u § 7. Polazimo od jednadžbe (15.48). Neka je $a = -\mu$, $\mu = const. > 0$ (sl. 1). Homogena jednadžba (15.48) glasi

$$(Au'')'' + \mu u'' = 0. \tag{1}$$

Pretpostavljat ćemo da su uz tu jednadžbu dani *homogeni rubni uvjeti* i da za $\mu = 0$ odgovarajući rubni problem ima samo *trivijalno* rješenje. Očekujemo da za dovoljno malo $\mu > 0$ problem također ima samo trivijalno rješenje. *Najmanja vrijednost parametra $\mu > 0$ za koju problem ima netrivijalno rješenje zove se kritična sila*; obilježavat ćemo je sa μ_1.



Slika 1.

* Slično kao u § 14 dokazuje se i ovdje da približno rješenje minimizira funkcional energije (18.4) na prostoru V_n^2.

Ako je $\mu < \mu_1$, ravnotežni položaj je $u = 0$. Za $\mu = \mu_1$ ravnotežni položaj $u = 0$ je *nestabilan*, jer postoji i ravnotežni položaj $u_1 \neq 0$ (izvijeni štap). U daljnjem pretpostavljamo da je štap cilindričan i homogen ($E = const.$).

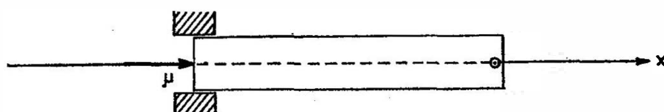
20.1. Primjer

Odredit ćemo kritičnu silu za štap kojem je lijevi kraj ukliješten, a desni učvršćen šarkom (sl. 2). Neka je $\mu/A = \lambda$. Imamo problem

$$u^{(iv)} + \lambda u'' = 0 \tag{2}$$

$$u(0) = u'(0) = 0 \tag{3}$$

$$u(l) = u''(l) = 0. \tag{4}$$



Slika 2.

Opće rješenje jednadžbe (2) je

$$u(x) = C_1 x + C_2 + C_3 \cos \sqrt{\lambda}\, x + C_4 \sin \sqrt{\lambda}\, x, \tag{5}$$

gdje su $C_1, \ldots, C_4$ proizvoljne konstante. Iz (3) slijedi

$$C_3 = -C_2,\ C_4 = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C_1. \tag{6}$$

Iz (4), (5) i (6) dobivamo

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin l\sqrt{\lambda}\right) C_1 + (1 - \cos l\sqrt{\lambda})\, C_2 = 0 \tag{7}$$

$$\sqrt{\lambda} \sin l\sqrt{\lambda} \cdot C_1 + \lambda \cos l\sqrt{\lambda} \cdot C_2 = 0. \tag{8}$$

Taj sistem ima netrivijalno rješenje (C_1, C_2) ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin l\sqrt{\lambda} & 1 - \cos l\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \sin l\sqrt{\lambda} & \lambda \cos l\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Iz toga dobivamo

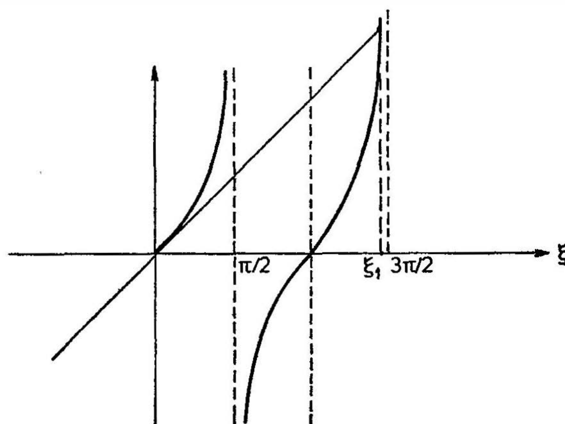
$$\xi = \operatorname{tg} \xi, \tag{10}$$

gdje je

$$\xi = l\sqrt{\lambda}. \tag{11}$$

Najmanji pozitivni korijen jednadžbe (10) je $\xi_1 \approx 4{,}49$ (sl. 3). Dobivamo

$$\mu_1 = \frac{\xi_1^2 A}{l^2}. \tag{12}$$



Slika 3.

Odgovarajuće rješenje je

$$u(x) = C\left(x - \frac{1}{\xi_1}\sin\frac{\xi_1 x}{l} - 2l\sin\frac{\xi_1 x}{2l}\right), \tag{13}$$

gdje je C proizvoljna konstanta (sl. 4).



Slika 4.

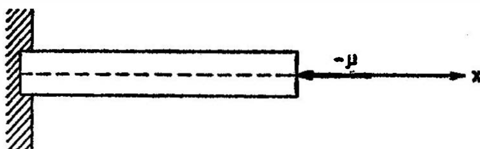
20.2. Primjer

Odredit ćemo kritičnu silu za štap kojem je lijevi kraj ukliješten, a desni slobodan (sl. 5). Neka je $\mu/A = \lambda$. Imamo problem

$$u^{(iv)} + \lambda u'' = 0 \tag{14}$$

$$u(0) = u'(0) = 0 \tag{15}$$

$$u''(l) = 0, \; u'''(l) + \lambda u'(l) = 0; \tag{16}$$



Slika 5.

primijetimo da se u ovom slučaju parametar λ pojavljuje i u rubnom uvjetu (v. (15.47)). Za λ dobivamo uvjet

$$\cos l\sqrt{\lambda} = 0. \tag{17}$$

Iz toga slijedi

$$l\sqrt{\lambda} = (2n-1)\frac{\pi}{2},\ n = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

ili

$$\lambda = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2},\ n = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

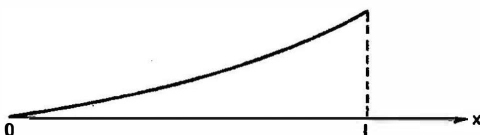
Najmanja vrijednost dobiva se za $n = 1$, pa imamo

$$\mu_1 = \frac{\pi^2 A}{4\,l^2}. \tag{20}$$

Odgovarajuće rješenje je

$$u(x) = C\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2l}\right), \tag{21}$$

gdje je C proizvoljna konstanta (sl. 6).

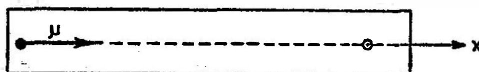


Slika 6.

Zadatak o kritičnoj sili je još jedan primjer *problema svojstvenih vrijednosti*. *Svojstvena vrijednost jednadžbe* (1) (*uz dane homogene rubne uvjete*) *je ona vrijednost parametra* μ *za koju ta jednadžba ima netrivijalno rješenje*; *odgovarajuće rješenje je svojstvena funkcija*. U primjerima 20.1 i 20.2 svojstvenih vrijednosti ima prebrojivo mnogo; to su (do na faktor) kvadrati korijena jednadžbe (10) (v. sl. 3) odnosno vrijednosti (19). Kao rješenje homogenog problema, *svojstvena funkcija je određena do na konstantan faktor*. Problem svojstvenih vrijednosti za jednadžbu (1) pojavit će se i u vezi s *titranjima* štapa.

20.3. Zadaci

20.3.1. Odredite kritičnu silu za štap kojem su oba kraja učvršćena šarkama (sl. 7).



Slika 7.

Rješenje. Imamo problem

$$u^{(iv)} + \lambda u'' = 0 \tag{22}$$

$$u(0) = u''(0) = 0 \tag{23}$$

$$u(l) = u''(l) = 0, \tag{24}$$

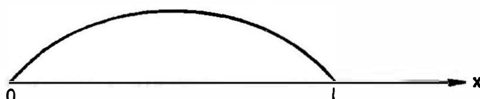
gdje je $\lambda = \mu/A$. Dobivamo

$$\mu_1 = \frac{\pi^2 A}{l^2}. \tag{25}$$

Odgovarajuće rješenje je

$$u(x) = C \sin\frac{\pi x}{l}, \tag{26}$$

gdje je C proizvoljna konstanta (sl. 8).

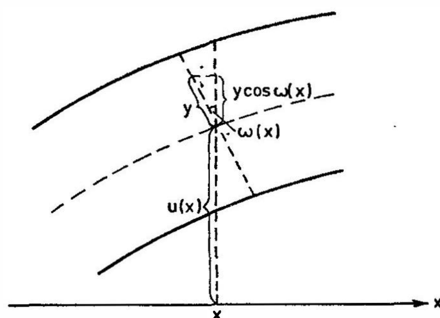


Slika 8.

20.3.2. Štap kojem su oba kraja učvršćena šarkama rotira jednoliko oko centralne linije kutnom brzinom Ω. Odredite *kritičnu vrijednost te brzine* (to jest najmanju vrijednost pri kojoj je ravnotežni položaj $u = 0$ *nestabilan*).

Rješenje. Na štap djeluje *centrifugalna sila* s gustoćom (sl. 9)

$$f(x) = \frac{\varrho}{S} \Omega^2 \iint\limits_{D(x)} (y \cos \omega(x) + u(x))\, dy\, dz = \varrho\, \Omega^2 u(x) \tag{27}$$



Slika 9.

i *spin* s gustoćom

$$s(x) = \frac{\varrho}{S} \Omega^2 \iint_{D(x)} y \sin \omega(x) (y \cos \omega(x) + u(x)) \, dy \, dz \approx$$

$$\approx \frac{\varrho}{S} \Omega^2 \iint_{D(x)} y \, \omega(x) (y + u(x)) \, dy \, dz = \quad (28)$$

$$= \frac{\varrho}{S} \Omega^2 \iint_{D(x)} y u'(x) (y + u(x)) \, dy \, dz = \frac{\varrho}{S} \Omega^2 I \, u'(x);$$

ovdje je ϱ linijska gustoća mase (zbog homogenosti je $\varrho = \text{const.}$), a S površina poprečnog presjeka. Jednadžba (15.39) glasi

$$u^{(iv)} + \frac{1}{S} \lambda \, u'' - \frac{\lambda}{I} u = 0, \quad (29)$$

gdje je

$$\lambda = \frac{\varrho}{E} \Omega^2. \quad (30)$$

Uz oznake

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{2 S}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4 S^2}{\lambda I}}\right)}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\lambda}{2 S}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 S^2}{\lambda I}}\right)}, \quad (31)$$

opće rješenje jednadžbe (29) je

$$u(x) = C_1 \operatorname{ch} \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x, \quad (32)$$

gdje su $C_1, \ldots, C_4$ proizvoljne konstante. Uvjeti $u(0) = u''(0) = 0$ daju $C_1 = C_3 = 0$. Uvjeti $u(l) = u''(l) = 0$ daju

$$C_2 \operatorname{sh} \alpha l + C_4 \sin \beta l = 0, \quad (33)$$

$$C_2 \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha l - C_4 \beta^2 \sin \beta l = 0. \quad (34)$$

Taj sistem ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je

$$\operatorname{sh} \alpha l \cdot \sin \beta l \cdot (\alpha^2 + \beta^2) = 0. \quad (35)$$

Iz toga slijedi

$$\sin \beta l = 0 \quad (36)$$

ili

$$\beta l = n \pi, n = 1, 2, \ldots \quad (37)$$

Imamo jednadžbu

$$l\sqrt{\frac{\lambda}{2\,S}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\,S^2}{\lambda\,I}}\right)}=n\,\pi. \tag{38}$$

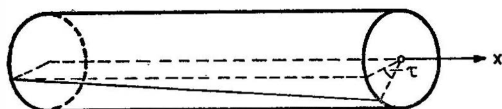
Najmanji korijen te jednadžbe dobiva se za $n = 1$ i jednak je

$$\lambda_1=\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(\frac{1}{I}+\frac{1}{S}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right)^{-1}. \tag{39}$$

Kritična kutna brzina je

$$\Omega_1=\sqrt{\frac{E\,\lambda_1}{\varrho}}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{E}{\varrho\left(\frac{1}{I}+\frac{1}{S}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right)}}. \tag{40}$$

20.3.3. Štap kružnog presjeka je ukliješten na obama krajevima. Lijevi kraj je učvršćen na torziju, a desni zakrenut (oko osi x) za kut τ (sl. 10). Odredite *kritičnu vrijednost tog kuta* (to jest najmanju vrijednost pri kojoj nedeformirano ravnotežno stanje $u = 0$ postaje *nestabilno*).



Slika 10.

Rješenje. Ako štap nije izvijen, za longitudinalni kontaktni *spin* dobivamo $m_x = C\,\tau$, $C = \mu \cdot R^4\,\pi/2l$ (v. zadatak 1.2.2). Za izvijen štap prirodno je usvojiti taj *zakon za komponentu spina u smjeru tangente na izvijenu centralnu liniju.* Tada umjesto (15.29) i (15.30) imamo

$$m_z = EI\,u_y'' + C\,\tau\,u_z', \tag{41}$$

$$m_y = -EI\,u_z'' + C\,\tau\,u_y', \tag{42}$$

gdje je $I = I_y = I_z$. Jednadžbe ravnoteže glase

$$u_y^{(iv)} + \lambda\,u_z''' = 0, \tag{43}$$

$$u_z^{(iv)} - \lambda\,u_y''' = 0, \tag{44}$$

gdje je

$$\lambda = \frac{C\,\tau}{EI}. \tag{45}$$

Sustav (43), (44) riješit ćemo uvođenjem nove funkcije

$$U = u_y + iu_z. \tag{46}$$

Ona zadovoljava jednadžbu

$$U^{(iv)} - i\lambda U''' = 0. \tag{47}$$

Opće rješenje te jednadžbe je

$$U = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + C_4 e^{i\lambda x}, \tag{48}$$

gdje su $C_1, \ldots, C_4$ proizvoljne konstante. Uvjeti $U(0) = U'(0) = 0$ daju $C_3 = -C_4$, $C_2 = -i\lambda C_4$. Uvjeti $U(l) = U'(l) = 0$ daju

$$l^2 C_1 + (-i\lambda l - 1 + e^{i\lambda l}) C_4 = 0, \tag{49}$$

$$2l C_1 + (-i\lambda + i\lambda e^{i\lambda l}) C_4 = 0. \tag{50}$$

Taj sustav ima netrivijalno rješenje (C_1, C_4) ako i samo ako je

$$e^{i\lambda l} = \frac{2 + i\lambda l}{2 - i\lambda l}. \tag{51}$$

Iz toga slijedi

$$\operatorname{tg} \xi = \xi, \; \xi = \frac{\lambda l}{2}. \tag{52}$$

Najmanji pozitivni korijen te jednadžbe je $\xi_1 \approx 4{,}49$. *Kritična vrijednost kuta je*

$$\tau_1 = \frac{EI}{C} \lambda_1 = \frac{EI}{C} \frac{2}{l} \xi_1. \tag{53}$$

§ 21. Nelinearni problemi

Pozornijim promatranjem izvoda naših rubnih problema u § 1 i § 15 uvjerit ćemo se da je linearnost posljedica pretpostavke

(a) da su deformacije male,

(b) da svojstva materijala (na primjer, modul elastičnosti) ne ovise o progibu.

Linearnost omogućuje — bar načelno — elegantno i pregledno rješavanje rubnog problema, o kojem smo govorili u prethodnim paragrafima.

S druge strane, ako nisu zadovoljene pretpostavke tipa (a) odnosno (b), potrebno je posegnuti za *nelinearnim modelom*, za koji se pretpostavlja da bolje odgovara stvarnosti. Isto tako, matematičare će zanimati pitanje koliko je izvod linearnog modela bio korektan. To znači da treba strogo ocijeniti *grešku* linearnog modela prema točnijem nelinearnom. U svakom slučaju nelinearni model najprije treba postaviti i riješiti. Teorija je ovdje, dakako, mnogo zamršenija, a isto tako i metode praktičnog rješavanja. I jedno i drugo je još uvijek predmet intenzivnog proučavanja kako matematičara tako i inženjera, iako su neke klase problema već dobro proučene.

U § 13 vidjeli smo da problem minimizacije *nekvadratičnih* funkcionala oblika (13.1) vodi na *nelinearne rubne probleme.* Sustavno izlaganje metoda rješavanja nelinearnih jednadžba daleko bi prelazilo okvire ove knjige. Mi ćemo se stoga ograničiti na *jednostavnije slučajeve*, posebno one *koji se ne udaljuju mnogo od linearnosti.*

21.1. Primjer

Promotrimo jednadžbu provođenja topline

$$-(a\,u')' = f \tag{1}$$

uz rubne uvjete

$$u(0) = 0, \; u(l) = d \tag{2}$$

i uz pretpostavku da je koeficijent provođenja a funkcija kako mjesta x tako i same temperature u, tako da na mjestu x koeficijent provođenja ima vrijednost $a(u(x), x)$. Pretpostavljamo

$$a(u, x) > 0 \tag{3}$$

za sve $x \in [0, l]$ i za sve u. Integracijom iz (1) dobivamo

$$u'(x) = \frac{F(x) + C}{a(u(x), x)}, \tag{4}$$

gdje je

$$F(x) = -\int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{5}$$

a konstantu C treba odrediti iz rubnih uvjeta. Jednadžba (4) je obična diferencijalna jednadžba prvog reda, koja se općenito ne da svesti na kvadrature*, tj. rješenje jo se ne da prikazati pomoću neodređenih integrala zadanih funkcija. Osim toga nije jasno postoji li njezino rješenje i je li jedinstveno.

Ako je štap *homogen*, onda a ne ovisi o x, pa iz jednadžbe (4) slijedi

$$\int_0^u a(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_0^x F(\xi)\,\mathrm{d}\xi + Cx + C_1. \tag{6}$$

Vidimo da smo sad jednadžbu (1) »sveli na kvadrature«, pri čemu jednakost (6) određuje *u implicitno* kao funkciju od x. Konstante C i C_1 određuju se iz rubnih uvjeta. Uzmemo li, na primjer,

$$a(u) = a_1 + \varepsilon u^2, \tag{7}$$

gdje su a_1 i ε pozitivne konstante, prelazi (6) u

---

* U starijoj matematičkoj terminologiji »kvadratura« je sinonim za »integracija«.

$$a_1 u + \frac{\varepsilon u^3}{3} = \int_0^x F(\xi)\,d\xi + Cx + C_1. \tag{8}$$

Uvrštavanje rubnih uvjeta (2) daje

$$C = \frac{1}{l}\left(a_1 d + \frac{\varepsilon d^3}{3} - \int_0^1 F(\xi)\,d\xi\right), C_1 = 0. \tag{9}$$

Zbog pozitivnosti konstanata a_1 i ε moguće je za svako x naći točno jedno u tako da bude ispunjena jednadžba (8), pa je time definirano rješenje u.

21.2. Zadaci

21.2.1. Dokažite da za svaku neprekidnu funkciju $a = a(\eta)$ takvu da je

$$a_0 = \inf_{-\infty<\eta<\infty} a(\eta) > 0. \tag{10}$$

diferencijalna jednadžba

$$-(a(u(x), u'))' = f(x) \tag{11}$$

uz rubne uvjete (2) ima rješenje i da je to rješenje jedinstveno.

Rješenje. Stavimo li

$$\varphi(u) = \int_0^u a(\eta)\,d\eta, \tag{12}$$

vidimo da uvjet (10) povlači da je *inverzna funkcija* φ^{-1} defnirana na $(-\infty, \infty)$. Tako iz (6) slijedi

$$u(x) = \varphi^{-1}(h(x)), \tag{13}$$

gdje je

$$h(x) = \int_0^x F(\xi)\,d\xi + \frac{x}{l}(\varphi(d) - \int_0^l F(\xi)\,d\xi). \tag{14}$$

Jedinstvenost dobivenog rješenja u slijedi iz same konstrukcije.

21.2.2. Odredite rješenje u rubnog problema (1), (2) uz pretpostavku (7), ako je $a_1 = \varepsilon = d = l = 1, f(x) = 1$. Predočite to rješenje grafički.

Rješenje. Imamo

$$\int_0^x F(\xi)\,d\xi = \int_0^x \xi\,d\xi = \frac{x^2}{2} \tag{15}$$

i prema (9)

$$C = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \tag{16}$$

Iz (8) i (9) izlazi jednadžba

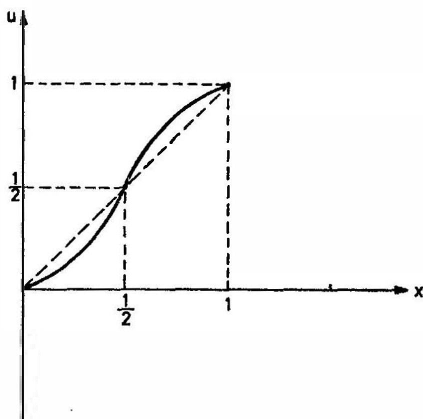
$$u + \frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{6}, \tag{17}$$

koja *implicitno* definira funkciju u. Vidimo da je prema očekivanju $u(0) = 0$, $u(1) = 1$, a osim toga i $u\left(\frac{1}{2}\right) = 1/2$. Koristeći se formulom (4) za derivaciju

$$u' = \frac{x + \frac{5}{6}}{1 + u^2}, \tag{18}$$

dobivamo $u'(0) = \frac{5}{6}$, $u'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{15}$, $u'(1) = \frac{11}{12}$, na osnovi čega se može načiniti gruba skica krivulje $u = u(x)$ (sl. 1). Točnija slika dobiva se iz prikaza *inverzne* funkcije

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{25}{9} + 8\left(u + \frac{u^3}{3}\right)}\right). \tag{19}$$



Slika 1.

Ovo je bio jedan od rijetkih slučajeva egzaktno rješivog nelinearnog rubnog problema. U sljedećem primjeru upoznat ćemo jednu vrstu rubnih problema, koji se mogu aproksimirati linearnim.

21.3. Primjer *(Nelinearna linijska sila.)*

Neka je $f(u, \xi)$ funkcija varijabla $u \in R$, $\xi \in [0, l]$. Promotrimo rubni problem

$$-(a(x)\,u'(x))' = f(u(x), x) \tag{20}$$

$$u(0) = 0, \gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = 0, \tag{21}$$

pri čemu za γ i δ pretpostavljamo uvjete (2.9). Kažemo da je ovaj problem *slabo nelinearan* ako je

$$f(u, x) = f_1(x) - b(x)\,u + f_2(u, x), \tag{22}$$

gdje je $b \geq 0$, a funkcija f_2 *mala* po apsolutnoj vrijednosti. U tom slučaju imamo jednadžbu

$$-(a\,u')' + bu = f_1(x) + f_2(u, x). \tag{23}$$

Problem (23), (21) ekvivalentan je integralnoj jednadžbi

$$u(x) = g(x) + \int_0^l G(x, \xi)\, f_2(u(\xi), \xi)\, d\xi, \tag{24}$$

gdje je G odgovarajuća *Greenova funkcija* i

$$g(x) = \int_0^l G(x, \xi)\, f_1(\xi)\, d\xi. \tag{25}$$

Funkcija (25) je rješenje »nesmetane« *linearne* jednadžbe

$$-(au')' + bu = f_1(x) \tag{26}$$

uz rubne uvjete (21). Smatramo li f_2 »malom smetnjom«, uzet ćemo funkciju

$$u_1 = g \tag{27}$$

za *prvu aproksimaciju* rješenja jednadžbe (23). Za *drugu aproksimaciju* stavljamo

$$u_2(x) = g(x) + \int_0^l G(x, \xi)\, f_2(u_1(\xi), \xi)\, d\xi, \tag{28}$$

i slično

$$u_{k+1}(x) = g(x) + \int_0^l G(x, \xi)\, f_2(u_k(\xi), \xi)\, d\xi, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{29}$$

Očekujemo da će u_k davati to bolju aproksimaciju točnog rješenja u što je k veće. Ovaj se postupak zove **metoda sukcesivnih aproksimacija**. Za praktične svrhe

ona je preporučljiva samo ako je f_2 toliko maleno da možemo očekivati da će već druga aproksimacija biti zadovoljavajuća te ako se integrali u jednakostima (25) i (28) daju eksplicitno izračunati. Ovaj posljednji zahtjev uključuje i eksplicitno poznavanje Greenove funkcije.

21.4. Zadaci

21.4.1. Izračunajte prve dvije aproksimacije u primjeru 21.3, ako je

$$\gamma = 0,\ \delta \neq 0,\ f_1(x) = f_{10},\ b = 0,\ a = a_0, \tag{30}$$

$$f_2(u, x) = -\varepsilon u^3, \tag{31}$$

gdje su $a_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, i f_{10} konstante.

Rješenje. Greenovu funkciju nesmetanog problema znamo od ranije (v. zadatak 9.2.1):

$$G(x, \xi) = \frac{1}{a_0} \cdot \begin{cases} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) x, & x \leq \xi \\ \left(1 - \frac{x}{l}\right) \xi, & x \geq \xi. \end{cases} \tag{32}$$

U tom slučaju je *nesmetano rješenje* (prva aproksimacija) dano formulom

$$u_1(x) = g(x) = \frac{f_{10}}{2a_0}(l - x)\, x, \tag{33}$$

a za drugu aproksimaciju imamo

$$u_2(x) = g(x) - \varepsilon \int_0^l G(x, \xi)\, g^3(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \frac{f_{10}}{2a_0} x (l - x) -$$

$$- \varepsilon \frac{f_{10}^3}{16\, a_0^3} x \left(-\frac{61}{140} l^7 + \frac{1}{6} l^3 x^4 - \frac{1}{15} l^2 x^5 - \frac{1}{7} l x^6 + \frac{1}{28} x^7\right). \tag{34}$$

21.4.2. Ispitajte konvergenciju *niza* $u_1, u_2, \ldots$ *sukcesivnih aproksimacija* definiranog formulama (27)—(29).

Rješenje. Postupak je posve analogan dokazu konvergencije sukcesivnih aproksimacija u Dodatku. Iz nejednakosti

$$|u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq \int_0^l G(x, \xi)\, |f_2(u_k(\xi), \xi) - \tag{35}$$

$$-f_2(u_{k-1}(\xi), \xi)| \, d\xi \leq K \int_0^l G(x, \xi) \, d\xi \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |u_k(x) - u_{k-1}(x)|$$

uz pretpostavku da je

$$K = \sup_{\substack{0 \leqslant \xi \leqslant l \\ -\infty < u < \infty}} \left| \frac{\partial f_2(u, \xi)}{\partial u} \right| < \infty, \tag{36}$$

zaključujemo da niz $u_1, u_2, \ldots$ konvergira *jednoliko* na $[0, l]$, ako je

$$\delta = K \int_0^l G(x, \xi) \, d\xi < 1. \tag{37}$$

Jednako kao i u Dodatku dokazuje se da niz $u_1, u_2, \ldots$ *konvergira* prema rješenju u jednadžbe (24) i da je to rješenje *jedinstveno. Ocjena greške* aproksimacije u_k bit će

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u(x) - u_k(x)| \leq \frac{\delta^k}{1 - \delta} \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |u_2(x) - u_1(x)|. \tag{38}$$

Primijetimo da za funkciju f_2 oblika (31) supremum (36) nije konačan, pa prema tome naše razmatranje nije primjenjivo na taj slučaj ma kako mali bio broj ε.

21.4.3. Primijenite metodu sukcesivnih aproksimacija na rubni problem u primjeru 21.1

Rješenje. Pretpostavljamo da je ovisnost funkcije a o varijabli u *slaba.* To možemo izreći tako da stavimo

$$\frac{1}{a(u, x)} = \frac{1}{a_1(x)} + a_2(u, x), \tag{39}$$

pri čemu je a_1 pozitivno, a a_2 dosta maleno. Integrirajući jednadžbu (4) i uzimajući u obzir rubne uvjete, dobivamo

$$u(x) = \int_0^x \frac{F(\xi) + C}{a(u(\xi), \xi)} \, d\xi, \tag{40}$$

$$C = \frac{d - \int_0^l \frac{F(\xi) \, d\xi}{a(u(\xi), \xi)}}{\int_0^l \frac{d\xi}{a(u(\xi), \xi)}}. \tag{41}$$

Mogli bismo uvrstiti (41) u (40) i tako dobiti jednu jednadžbu za nepoznatu funkciju u. Budući da je ta jednadžba dosta zamršena, rješavamo (40), (41) kao sustav jednadžba za nepoznato C i u.

Budući da u formuli (39) i funkciju a_2 smatramo »malenom«, *prvu aproksimaciju* rješenja definirat ćemo tako da u (40) odnosno (41) umjesto a uvrstimo a_1. Tako dobivamo

$$C_1 = \frac{d - \int_0^x \frac{F(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{a_1(\xi)}}{\int_0^l \frac{\mathrm{d}\,\xi}{a_1(\xi)}}, \tag{42}$$

$$u_1(x) = \int_0^x \frac{F(\xi) + C_1}{a_1(\xi)}\,\mathrm{d}\xi. \tag{43}$$

Sljedeće *sukcesivne aproksimacije* definiramo ovako:

$$C_{k+1} = \frac{d - \int_0^l \frac{F(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{a(u_k(\xi), \xi)}}{\int_0^l \frac{\mathrm{d}\,\xi}{a(u_k(\xi), \xi)}}, \tag{44}$$

$$u_{k+1}(x) = \int_0^x \frac{F(\xi) + C_{k+1}}{a(u_k(\xi), \xi)}\,\mathrm{d}\xi, \tag{45}$$

za $k = 1, 2, \ldots$. Primijetimo da tako definirane aproksimacije zadovoljavaju oba rubna uvjeta, to jest vrijedi $u_k(0) = 0$ i $u_k(l) = d$ za sve k.

21.4.4. Ispitajte *postojanje* i *jedinstvenost* rješenja rubnog problema iz primjera 21.1 koristeći se *sukcesivnim aproksimacijama* definiranim u zadatku 21.4.3 za slučaj da je

$$a(u, x) = a_1(x) + \varepsilon\, u^2, \tag{46}$$

gdje je $\varepsilon > 0$ i

$$a_0 = \inf a(x) > 0, \ \tilde{a}_0 = \sup a(x) < \infty. \tag{47}$$

Rješenje. Prema (39) i (46) imamo

$$a_2(u, x) = -\frac{\varepsilon\, u^2}{a_1(x)(a_1(x) + \varepsilon\, u^2)}. \tag{48}$$

Najprije ćemo dokazati da su nizovi C_k, u_k ograničeni. Zaista, iz (42) i (44) slijedi

$$|C_k| \leq \widetilde{C} = \frac{\tilde{a}_0}{l}\left(d + \frac{1}{a_0}\int_0^l |F(\xi)|\,d\xi\right),\ k = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

a iz (43) i (45) slijedi

$$|u_2(x)| \leq U = \frac{1}{a_0}\widetilde{C} + \frac{1}{a_0}\int_0^l |F(\xi)|\,d\xi,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{50}$$

Pišući kraće $\alpha_k(\xi) = a(u_k(\xi), \xi)$, imamo

$$\begin{aligned} C_{k+1} - C_k = & \frac{1}{\int_0^l \frac{d\xi}{\alpha_k}}\int_0^l \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{k-1}}\right) F\,d\xi + \\ & + \left(d - \int_0^l \frac{F\,d\xi}{\alpha_{k-1}}\right)\frac{\int_0^l \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right) d\xi}{\int_0^l \frac{d\xi}{\alpha_k}\int_0^l \frac{d\xi}{\alpha_{k-1}}} \end{aligned} \tag{51}$$

i odatle

$$\begin{aligned} |C_{k+1} - C_k| \leq & \frac{\tilde{a}_0}{l} K(\varepsilon)\int_0^l |F|\,d\xi \max_{0\leqslant x\leqslant l} |u_k(x) - u_{k-1}(x)| + \\ & + \left(d + \frac{1}{a_0}\int_0^l |F|\,d\xi\right)\left(\frac{\widetilde{a}_0}{l}\right)^2 l\,K(\varepsilon)\max_{0\leqslant x\leqslant l}|u_k(x) - u_{k+1}(x)| = \\ = & \frac{\tilde{a}_0}{l} K(\varepsilon)\,(\widetilde{a}_0\, d + \left(1 + \frac{\tilde{a}_0}{a_0}\right)\int_0^l |F|\,d\xi \max_{0\leqslant x\leqslant l}|u_k(x) - u_{k-1}(x)| = \\ & = K_1(\varepsilon)\max_{0\leqslant x\leqslant l}|u_k(x) - u_{k-1}(x)|. \end{aligned} \tag{52}$$

Pri tome smo se koristili jednakošću

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1}{a_1(\xi) + \varepsilon v_1^2(\xi)} - \frac{1}{a_1(\xi) + v_2^2(\xi)}\right| \leq \\ & \leq K(\varepsilon)\max_{|\eta|\leqslant U}|v_1(\eta) - v_2(\eta)|, \end{aligned} \tag{53}$$

koja vrijedi za $|v_1| \leq U$, $|v_2| \leq U$, gdje je

$$K(\varepsilon) = \max_{\substack{|\eta|\leqslant U \\ 0\leqslant\xi\leqslant l}}\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{a_1(\xi) + \varepsilon\eta^2}\right| \leq \max_{|\eta|\leqslant U}\left|\frac{2\,\varepsilon\eta}{(a_0 + \varepsilon\eta^2)^2}\right| \leq \frac{2U}{a_0} \tag{54}$$

i

$$K_1(\varepsilon) = K(\varepsilon)\frac{\tilde{a}_0}{l}\left(\tilde{a}_0 d + \left(1 + \frac{\tilde{a}_0}{a_0}\right)\int_0^l |F| \, \mathrm{d}\xi\right). \tag{55}$$

Odatle i iz (45) izlazi

$$|u_{k+1}(x) - u_k(x)| \le K(\varepsilon)\int_0^l (|F| + \widetilde{C})\,\mathrm{d}\xi \max_{0\leqslant\xi\leqslant l} |u_k(\xi) - u_{k-1}(\xi)| +$$

$$+ \frac{1}{a_0}|C_{k+1} - C_k| \le K_2(\varepsilon)\max_{0\leqslant\xi\leqslant l}|u_k(\xi) - u_{k-1}(\xi)|, \tag{56}$$

gdje je

$$K_2(\varepsilon) = K(\varepsilon)\left(\widetilde{C}\, l + \left(1 + \frac{\tilde{a}_0}{a_0} + \left(\frac{\tilde{a}_0}{a_0}\right)^2\right)\int_0^l |F| \, \mathrm{d}\xi\right). \tag{57}$$

Rješenje postoji i jedinstveno je za

$$K_2(\varepsilon) < 1. \tag{58}$$

Pitanje *korektnosti* može se odnositi na dvije stvari: (*i*) ponašanje rješenja za $\varepsilon \to 0$, to jest kad nelinearnost postaje slabija, (*ii*) ponašanje rješenja za mala vanjska djelovanja, to jest za maleno F i d. U obama slučajevima moguće je postići da bude ispunjena nejednakost (58).

(*i*) Primijetimo da je baš naša prva aproksimacija u_1 rješenje linearnog problema za $\varepsilon = 0$, to jest rubnog problema

$$-(a_1 u')' = f, \ u(0) = 0, \ u(l) = d. \tag{59}$$

Iz (40) i (43) dobivamo slično kao gore

$$|u(x) - u_1(x)| \le \int_0^x \left|\frac{F(\xi) + C}{a_1(\xi) + \varepsilon u^2(\xi)} - \frac{F(\xi) + C_1}{a_1(\xi)}\right| \mathrm{d}\xi \le$$

$$\le \int_0^l (|F| + \widetilde{C})\,\mathrm{d}\xi\, K(\varepsilon)\max_{0\leqslant x\leqslant l}|u_1(x)| + \frac{1}{a_0}|C - C_1| \tag{60}$$

i

$$|C - C_1| \le K_1(\varepsilon)\max_{0\leqslant x\leqslant l}|u_1(x)|. \tag{61}$$

Odatle izlazi konačno

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l}|u(x) - u_1(x)| \le K_2(\varepsilon)\max_{0\leqslant x\leqslant l}|u_1(x)|. \tag{62}$$

Vidimo da za $\varepsilon \to 0$ rješenje u (koje također ovisi o ε!) *jednoliko* konvergira prema »nesmetanom« rješenju u_1 linearnog problema. Tako je dokazano prvo svojstvo korektnosti.

(*ii*) Ovdje smatramo ε čvrstim i puštamo da veličine

$$f_0 = \max_{0 \leqslant \xi \leqslant l} |f(\xi)|, \; d \tag{63}$$

teže k nuli. Tada je, kao što se lako vidi,

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} |u(x) - u_1(x)| \leq \text{const}\,(d + f_0)^2, \tag{64}$$

pri čemu konstanta na desnoj strani ne ovisi o d i f_0. Tako smo provjerili korektnost i u drugom slučaju. Činjenica da na desnoj strani nejednakosti stoji kvadrat »male veličine« $d + f_0$ znači da je aproksimacija u_1 točnog rješenja osobito dobra. Takva kvadratična greška je u vezi s postupkom linearizacije, koji ćemo opisati na kraju paragrafa.

Iz razmatranih nelinearnih rubnih problema razabiremo da način rješavanja jako ovisi o konkretnom obliku diferencijalne jednadžbe. Posebno je važno ispitati može li se jednadžba bar »djelomično« integrirati (kao u primjeru 21.1) prije negoli se definiraju sukcesivne aproksimacije. Osim toga, važno je znati odrediti »bliski« problem, kojega rješenje uzimamo kao prvu aproksimaciju. Svakako, najvažniji način zamjenjivanja nelinearnog problema linearnim jest linearizacija. Promotrimo nelinearnu diferencijalnu jednadžbu

$$\Phi(u'', u', u, x) = 0, \tag{65}$$

uz rubne uvjete

$$u(0) = 0, u(l) = d. \tag{66}$$

Upotrebom *Taylorove formule* funkciju Φ za fiksiranu vrijednost varijable $\eta_4 = x$ aproksimiramo linearnom funkcijom

$$\Phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \approx \Phi(\eta_1^0, \eta_2^0, \eta_3^0, \eta_4^0) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\eta_1^0, \eta_2^0, \eta_3^0, \eta_4^0)(\eta_i - \eta_i^0)$$

oko točke $(\eta_1^0, \eta_2^0, \eta_3^0)$. Koristeći se tom formulom, aproksimiramo jednadžbu (65) jednadžbom

$$\Phi(u_0''(x), u_0'(x), u_0(x), x) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1}(u_0''(x), u_0'(x), u_0(x), x)\, v'' +$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2}(u_0''(x), u_0'(x), u_0(x), x)\, v' + \tag{68}$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_3}(u_0''(x), u_0'(x), u_0(x), x)\, v = 0.$$

Pri tome će $u_0 + v$ biti približno rješenje. Rubne uvjete za v postavljamo ovako:

$$v(0) = -u_0(0), v(l) = d - u_0(l) \tag{69}$$

(tako se osigurava da približno rješenje zadovoljava iste uvjete kao i točno). Tako smo dobili linearni rubni problem (68), (69). Kažemo da smo problem (65), (66) *linearizirali oko funkcije u_0*. Taj se postupak može ponoviti tako da za dobiveno v iz (68), (69) provedemo linearizaciju oko $u_0 + v$ itd. Tako se dobiva *niz sukcesivnih aproksimacija* za točno rješenje problema (65), (66). Ova metoda približnog rješavanja nelinearnog problema zove se **Newtonova metoda** zbog analogije s poznatom istoimenom metodom za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$

21.5. Primjer

U primjeru 21.1. imamo

$$\Phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \eta_1 \, a(\eta_3, \eta_3) + \frac{\partial a}{\partial \eta_3}(\eta_3, \eta_4)\, \eta_2^2 + \frac{\partial a}{\partial \eta_4}(\eta_3, \eta_4)\, \eta_2 + f(x). \tag{70}$$

Upotreba formule (68) uz $u_0 = 0$ vodi na rubni problem

$$-(a_1 v')' = f, \ v(0) = 0, \ v(l) = d, \tag{71}$$

uz $a_1(x) = a(0, x)$. Rješenje v ovoga linearnog problema identično je s rješenjem u_1 iz formule (43), ako stavimo $a(u, x) = a_1(x) + \varepsilon u^2$. Provjeru te činjenice prepuštamo čitatelju.

21.6. Primjer

Prva linearna aproksimacija problema (20), (21) dobivena linearizacijom u nuli daje u formuli (22)

$$f_1(x) = f(0, x), \ b(x) = -\frac{\partial f}{\partial u}(0, x). \tag{72}$$

(Vidi posebni slučaj zadan formulom (31)).

Primijetimo da se sukcesivne aproksimacije u primjeru 3 i zadatku 4.3 razlikuju od sukcesivnih aproksimacija Newtonove metode, iako se prve aproksimacije mogu poklapati.

Za Newtonovu metodu je bitno da se na svakom koraku rješava novi linearni rubni problem.

DODATAK

1. Cauchyjev problem za obične diferencijalne jednadžbe

Normalni sustav običnih diferencijalnih jednadžba prvog reda ima oblik

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, x), \; i = 1, 2, \ldots, n; \tag{1}$$

pretpostavljat ćemo da su funkcije f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ definirane na $\mathbf{R}^n \times [a, b]$ (a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$). Pod **rješenjem** sustava (1) na segmentu $[a, b]$ razumijevamo n-torku funkcija $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathscr{H}^1(a, b)$, za koje vrijedi

$$y_i'(x) = f_i(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), x), \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

u svakoj točki $x \in [a, b]$ u kojoj su one diferencijabilne*. Za proizvoljno $x_0 \in [a, b]$, $y_{i0} \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots$, **n** postavljamo za sustav (1) **Cauchyjev problem**: *odrediti rješenje sustava* (1) (*na segmentu* $[a, b]$) *koje zadovoljava početne uvjete*

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Normalna obična diferencijalna jednadžba n-tog reda ima oblik

$$y^{(n)} = f(y, y, \ldots, y^{(n-1)}, x); \tag{4}$$

pretpostavljat ćemo da je funkcija $f(y_1, y_2, \ldots, y_n, x)$ definirana na $\mathbf{R}^n \times [a, b]$ (a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$). Pod **rješenjem** jednadžbe (4) na segmentu $[a, b]$ razumijevamo funkciju y $\in \mathscr{H}^n$ (a, b), za koju vrijedi

$$y^{(n)}(x) = f(y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), x) \tag{5}$$

u svakoj točki $x \in [a, b]$ u kojoj ona ima n-tu derivaciju. Za proizvoljno $x_0 \in [a, b]$, $y_{i0} \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ postavljamo za jednadžbu (5) **Cauchyjev problem**: *odrediti rješenje jednadžbe* (5) (*na segmentu* $[a, b]$) *koje zadovoljava početne uvjete*

$$y^{(i-1)}(x_0) = y_{i0}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Problem (4), (6) *može se svesti na problem* (1), (3). Ako je y rješenje problema (4), (6) i ako je

$$y_i = y^{(i-1)}, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

---

* Diferencijabilnost u točki a odnosno b označuje postojanje desne odnosno lijeve derivacije.

onda vrijedi

$$y_n(x) = f(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), x) \tag{8}$$

u svakoj točki $x \in [a, b]$ u kojoj y ima n-tu derivaciju; iz toga slijedi da je n-torka $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ rješenje Cauchyjevog problema

$$y_i = y_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n-1;\ y_n = f(y_1, y_2, \ldots, y_n, x), \tag{9}$$

$$y_i(x_0) = y_{i0},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Obratno, ako je $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ rješenje problema (9), (10), onda je $y = y_1$ rješenje problema (4), (6).

Neka je funkcija $f(y_1, y_2, \ldots, y_n, x)$ definirana na $\mathbf{R}^n \times [a, b]$ ($a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$); kažemo da je ona *po dijelovima neprekidna po varijabli* x ako je neprekidna svuda osim na $\mathbf{R}^n \times S$, gdje je *skup skokova* $S \subset (a, b)$ konačan, i ako za svako $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ i svako $x \in S$ postoje limesi

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n, x+0) = \lim_{\substack{\eta_i \to y_i,\ i=1,2,\ldots,n \\ \xi > x,\ \xi \to x}} f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \xi), \tag{11}$$

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n, x-0) = \lim_{\substack{\eta_i \to y_i,\ i=1,2,\ldots,n \\ \xi < x,\ \xi \to x}} f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \xi). \tag{12}$$

1.1. Teorem

Neka su funkcije $f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *definirane na* $\mathbf{R}^n \times [a, b]$ ($a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) *i po dijelovima neprekidne po varijabli* x, *sa skupom skokova* S; *neka su parcijalne dervacije* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *neprekidne na* $\mathbf{R}^n \times [a, b] \setminus S$) *i neka je*

$$K = \sup_{\substack{y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R} \\ x \in [a,b]/S \\ i,j=1,2,\ldots,n}} \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)(y_1, y_2, \ldots, y_n, x) \right| < \infty. \tag{13}$$

Tada problem (1), (3) *ima jedno i samo jedno rješenje* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *pri čemu su funkcije* y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *diferencijabilne na* $[a, b] \setminus S$.

Dokaz. Problem (1), (3) *ekvivalentan je sustavu integralnih jednadžbi*

$$y_i(x) = y_{i0} + \int_0^x f(y_1(\xi), y_2(\xi), \ldots, y_n(\xi), \xi)\, d\xi,\ x \in [a, b], \tag{14}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

u ovom smislu: ako je $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ rješenje problema (1), (3), onda vrijedi (14); ako su funkcije y_i neprekidne na $[a, b]$ i ako vrijedi (14), onda je $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ rješenje problema (1), (3). Zaista, iz pretpostavke $y_i \in \mathscr{H}^1(a, b)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ i jednakosti (2) i (3) neposredno slijedi (14). Obratno, ako su funkcije y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ neprekidne na $[a, b]$ i ako zadovoljavaju (14), onda one zadovoljavaju (3), diferencijabilne su na $[a, b] \setminus S$ i na tom skupu zadovoljavaju (2); iz toga za $x \in S$ dobivamo

$$y_i'(x \pm 0) = f(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), x \pm 0), \tag{15}$$

pa je $y_i \in \mathscr{H}^1(a, b)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Prema tome, dovoljno je dokazati da sustav (14) ima jedinstveno (neprekidno) rješenje. Definirajmo *niz sukcesivnih aproksimacija*:

$$y_i^{[0]} = y_{i0} \tag{16}$$

$$y_i^{[k+1]}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(y_1^{[k]}(\xi), y_2^{[k]}(\xi), \ldots, y_n^{[k]}(\xi), \xi)\, d\xi, \tag{17}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Funkcije (16), (17) su neprekidne na $[a, b]$. Dokazat ćemo da *niz* $y_i^{[k]}$, $k = 0, 1, \ldots$ *jednoliko konvergira na* $[a, b]$. Za $x \in [a, b] \setminus S$, $\tilde{y}_i, y_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ iz (13) slijedi (prema *Teoremu srednje vrijednosti*)

$$|f_i(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n, x) - f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, x)| \leq K \sum_{i=1}^{n} |\tilde{y}_i - y_i| \leq$$
$$\leq Kn \max_{i=1,2,\ldots,n} |\tilde{y}_i - y_i|. \tag{18}$$

Neka je $x \in [a, b]$, $x \geq x_0$; iz (17) i (18) za $k \geq 1$ dobivamo

$$|y_i^{[k+1]}(x) - y_i^{[k]}(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f_i(y_1^{[k]}(\xi), \ldots, y_n^{[k]}(\xi), \xi) -$$
$$- f_i(y_1^{[k-1]}(\xi), \ldots, y_n^{[k-1]}(\xi), \xi)|\, d\xi \leq \tag{19}$$
$$\leq Kn \max_{i=1,2,\ldots,n} \int_{x_0}^{x} |y_i^{[k]}(\xi) - y_i^{[k-1]}(\xi)|\, e^{-\alpha(\xi - x_0)} e^{\alpha(\xi - x_0)}\, d\xi,$$

$$|y_i^{[k+1]}(x) - y_i^{[k]}(x)| \leq Kn \max_{\substack{i=1,2,\ldots,]n \\ \xi \in [a,b}} (|y_i^{[k]}(\xi) -$$
$$- y_i^{[k-1]}(\xi)|\, e^{-\alpha(\xi - x_0)}) \frac{e^{\alpha(x - x_0)} - 1}{\alpha}, \tag{20}$$

$$|y_i^{[k+1]}(x) - y_i^{[k]}(x)|\, e^{-\alpha(x - x_0)} \leq$$
$$\leq \frac{Kn}{\alpha} \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ \xi \in [a,b]}} |y_1^{[k]}(\xi) - y_i^{[k-1]}(\xi)|\, e^{-\alpha(\xi - x_0)}. \tag{21}$$

Nejednakost (21) dobiva se i za $x \in [a, b]$, $x \leq x_0$, pa za $x \in [a, b]$ imamo

$$|y_i^{[k+1]}(x) - y_i^{[k]}(x)|\, e^{-\alpha|x-x_0|} \leq$$
$$\leq \frac{Kn}{\alpha} \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ \xi \in [a,b]}} |(y_i^{[k]}(\xi) - y_i^{[k-1]}(\xi)|\, e^{-\alpha|\xi-x_0|}). \tag{22}$$

Iz toga indukcijom dobivamo

$$|y_i^{[k+1]}(x) - y_i^{[k]}(x)|\, e^{-\alpha|x-x_0|} \leq$$
$$\leq \left(\frac{Kn}{\alpha}\right)^{k-1} \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ \xi \in [a,b]}} (|y_i^{[1]}(\xi) - y_i^{[0]}(\xi)\,|\, e^{-\alpha|\xi-x_0|}). \tag{23}$$

Neka je $\alpha > Kn$. Iz (23) slijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_i^{[k+1]}(x) - y_1^{[k]}(x)|\, e^{-\alpha|x-x_0|} \leq \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ \xi \in [a,b]}} (|y_i^{[1]}(\xi) - \tag{24}$$
$$-y_i^{[0]}(\xi)|\, e^{-\alpha|\xi-x_0|}) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Kn}{\alpha}\right)^{k-1} = \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ \xi \in [a,b]}} (|y_i^{[1]}(\xi) - y_i^{[0]}(\xi)|\, e^{-\alpha|\xi-x_0|}) \frac{1}{1 - \dfrac{Kn}{\alpha}},$$

pa red

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha|x-x_0|} (y_i^{[k+1]}(x) - y_i^{[k]}(x)) \tag{25}$$

konvergira jednoliko na $[a, b]$. Parcijalne sume tog reda čine niz

$$e^{-\alpha|x-x_0|} y_i^{[k]}(x),\ k = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

koji konvergira jednoliko na $[a, b]$, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$. Lako se vidi da isti zaključak vrijedi i za niz $y_i^{[k]}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Zbog neprekidnosti funkcija $y_i^{[k]}$, k = 1, 2,..., neprekidne su na $[a, b]$ i funkcije

$$y_i(x) = \lim_{k \to \infty} y_i^{[k]}(x),\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{27}$$

Dokazat ćemo da te funkcije zadovoljavaju (14). Koristeći se još jednom nejednakošću (18) dobivamo

$$\left| \int_{x_0}^{x} (f_i(y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi), \xi) - f_i(y_1^{[k]}(\xi), \ldots, y_n^{[k]}(\xi), \xi))\, d\xi \right| \leq$$
$$\leq (b - a)\, Kn \cdot \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ \xi \in [a,b]}} |y_i(\xi) - y_i^{[k]}(\xi)|; \tag{28}$$

desna strana u toj nejednakosti teži nuli za $k \to \infty$ pa zaključujemo

$$\int_{x_0}^{x} f_i(y_1^{[k]}(\xi), \ldots, y_n^{[k]}(\xi), \xi)\, d\xi \to \int_{x_0}^{x} f_i(y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi), \xi)\, d\xi, k \to \infty. \tag{29}$$

Uzimajući sad u (17) limes $k \to \infty$, dobivamo jednakost (14). Pretpostavimo da osim rješenja (27) sustav (14) ima još neko rješenje $z_1, z_2, \ldots, z_n$, to jest da vrijedi

$$z_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(z_1(\xi), \ldots, z_n(\xi), \xi)\, d\xi, x \in [a, b], \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{30}$$

pri čemu su funkcije z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ neprekidne na $[a, b]$. Iz (14) i (30) slijedi

$$|y_i(x) - z_i(x)| = \int_{x_0}^{x} |f_i(y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi), \xi) - f_i(z_1(\xi), \ldots, z_n(\xi), \xi)|\, d\xi. \tag{31}$$

Iz toga slično kao u dokazu nejednakosti (22) dobivamo

$$|y_i(x) - z_i(x)|\, e^{-\alpha|x-x_0|} \leq \frac{Kn}{\alpha} \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ \xi \in [a,b]}} (|y_i(\xi) - z_i(\xi)|\, e^{-\alpha|\xi-x_0|}, \tag{32}$$

$$\max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ x \in [a,b]}} (|y_i(x) - z_i(x)|\, e^{-\alpha|x-x_0|}) \leq \tag{33}$$

$$\leq \frac{Kn}{\alpha} \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ \xi \in [a,b]}} (|y_i(\xi) - z_i(\xi)|\, e^{-\alpha|\xi-x_0|});$$

zbog $Kn/\alpha < 1$ zaključujemo da je $y_i(x) - z_i(x) = 0$ za svako $x \in [a, b]$.

Za problem (1.4), (1.6) slijedi iz teorema 1.1. ovaj rezultat.

1.2. Teorem

Neka je funkcija $f(y_1, y_2, \ldots, y_n, x)$ *definirana na* $\mathbf{R}^n \times [a, b]$ $(a, b \in \mathbf{R}, a < b)$ *i po dijelovima neprekidna po varijabli* x, *sa skupom skokova* S; *neka su parcijalne derivacije* $\frac{\partial f}{\partial y_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ *neprekidne na* $\mathbf{R}^n \times [(a, b] \setminus S)$ *i neka je*

$$K = \sup_{\substack{y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R} \\ x \in [a, b] \setminus S \\ j=1,2,\ldots,n}} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(y_1, y_2, \ldots, y_n, x) \right| < \infty. \tag{34}$$

Tada problem (4), (6) *ima jedno i samo jedno rješenje, pri čemu funkcija* y *ima* n*-tu derivaciju na* $[a, b] \setminus S$.

2. Linearne jednadžbe. Liouvilleova formula

Sustav (1.1) je **linearan** ako je

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + b_i(x), \tag{1}$$

gdje su a_{ij} i b_i funkcije na $[a, b]$. Prema tome, *normalni linearni sustav* prvog reda ima oblik

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + b_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Iz teorema 1.1 dobivamo za sustav (2) ovaj rezultat.

2.1. Teorem

Ako je a_{ij}, $b_j \in \mathscr{H}^0(a, b)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, Cauchyjev problem za sustav (2) *ima jedno i samo jedno rješenje $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, pri čemu su funkcije y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ diferencijabilne u svakoj točki $x \in [a, b]$ u kojoj su funkcije a_{ij}, b_i, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ neprekidne.*

Sustav (2) je *homogen* ako je $b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, inače je *nehomogen*. Ako rješenje $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ homogenog sustava

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

zadovoljava homogene početne uvjete $y_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, onda je $y_i = 0$ (to jest $y_i(x) = 0$ za svako $x \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$). Ako su

$$(y_1^{[k]}, y_2^{[k]}, \ldots, y_n^{[k]}), \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{4}$$

rješenja sustava (3), onda je i njihova *linearna kombinacija* s proizvoljnim koeficijentima $c_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, to jest funkcija

$$\sum_{k=1}^{r} c_k (y_1^{[k]}, y_2^{[k]}, \ldots, y_n^{[k]}), \tag{5}$$

također rješenje sustava (3). Rješenja (4) su *linearno nezavisna* ako linearna kombinacija (5) iščezava samo u slučaju $c_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$; u protivnom rješenja (4) su *linearno zavisna*. Ako su za neko $x_0 \in [a, b]$ vektori

$$(y_1^{[k]}(x_0), y_2^{[k]}(x_0), \ldots, y_n^{[k]}(x_0)), \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{6}$$

linearno zavisni, onda su i rješenja (4) linearno zavisna; drugim riječima, *ako su rješenja* (4) *linearno nezavisna, onda su vektori* (6) *linearno nezavisni za svako* $x_0 \in$ $\in [a, b]$. Zaista, ako su vektori (6) linearno zavisni, onda postoje brojevi c_k, $k = 1$, $2, \ldots, r$ od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je

$$\sum_{k=1}^{r} c_k \left(y_1^{[k]}(x_0), y_2^{[k]}(x_0), \ldots, y_n^{[k]}(x_0)\right) = 0. \tag{7}$$

Neka je

$$y_i = \sum_{k=1}^{r} c_k y_i^{[k]}. \tag{8}$$

Tada je $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ rješenje sustava (3), a zbog (7) ono zadovoljava homogene početne uvjete $y_i(x_0) = 0, i = 1, 2, \ldots, n$; iz toga slijedi da je $y_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$.

Svaki skup od n linearno nezavisnih rješenja

$$(y_1^{[k]}, y_2^{[k]}, \ldots, y_n^{[k]}),\ k = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

sustava (3) je **fundamentalan skup (sustav) rješenja**. Dokažimo da *fundamentalan sustav postoji*. Neka je

$$(a_1^{[k]}, a_2^{[k]}, \ldots, a_n^{[k]}),\ k = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

proizvoljan skup od n linearno nezavisnih vektora. Neka je $(y_1^{[k]}, y_2^{[k]}, \ldots, y_n^{[k]})$ rješenje sustava (3) uz početne uvjete

$$y_i^{[k]}(x_0) = a_i^{[k]},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Tada su vektori

$$(y_1^{[k]}(x_0), y_2^{[k]}(x_0), \ldots, y_n^{[k]}(x_0)),\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

linearno nezavisni, pa su i rješenja $(y_1^{[k]}, y_2^{[k]}, \ldots, y_n^{[k]}), k = 1, 2, \ldots, n$ linearno nezavisna.

Ako je (9) fundamentalni sustav rješenja, onda je **opće rješenje sustava** (3) dano formulom

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k (y_1^{[k]}, y_2^{[k]}, \ldots, y_n^{[k]}), \tag{13}$$

gdje su c_k proizvoljne konstante; drugim riječima, za svako rješenje $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ postoje brojevi $c_k, k = 1, 2, \ldots, n$ takvi da vrijedi (13). Zaista, ako je $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ rješenje sustava (3) i $x_0 \in [a, b]$, onda se vektor $(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots y_n(x_0))$ može razviti po *bazičnim vektorima* (12); neka su $c_k, k = 1, 2, \ldots, n$ *koeficijenti* tog razvoja:

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)) = \sum_{k=1}^{n} c_k (y_1^{[k]}, y_2^{[k]}(x_0), \ldots, y_n^{[k]}(x_0)). \tag{14}$$

Tada rješenje $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ i rješenje

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (y_1^{[k]}, y_2^{[k]}, \ldots, y_n^{[k]}) \tag{15}$$

zadovoljavaju isti početni uvjet pa se podudaraju, to jest vrijedi (13).

Neka su (9) rješenja sustava (3); promotrimo matricu kojoj su ta rješenja stupci:

$$\begin{bmatrix} y_1^{[1]} & y_1^{[2]} & \cdot & \cdot & y_1^{[n]} \\ y_2^{[1]} & y_2^{[2]} & \cdot & \cdot & y_2^{[n]} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{[1]} & y_n^{[2]} & \cdot & \cdot & y_n^{[n]} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Determinantu matrice (16) označujemo s W i zovemo **determinanta Wronskog ili Wronskijan** rješenja (9). Iz prethodnih razmatranja slijedi ova činjenica: *Ako je* (9) *fundamentalan sustav, onda je* $W(x) \neq 0$ *za svako* $x \in [a, b]$; *ako su rješenja* (9) *linearno zavisna, onda je* $W = 0$.

2.2. Teorem

Neka je W Wronskijan nekog fundamentalnog skupa rješenja sustava (3) *i neka je* $x_0 \in [a, b]$. *Tada vrijedi* **Liouvilleova formula**

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} S(\xi)\, d\xi}, \tag{17}$$

gdje je

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{18}$$

Dokaz. Neka je (9) fundamentalni sustav i W njegov Wronskijan. Funkcija W je diferencijabilna u svakoj točki $x \in [a, b]$ u kojoj su diferencijabilne funkcije (9); izračunat ćemo $W'(x)$. Neka je $\overline{W}_i$ determinanta matrice koja se dobiva iz matrice (16) tako da se njezin i-ti redak zamijeni retkom

$$((y_i^{[1]})', (y_i^{[2]})', \ldots, (y_i^{[n]})'). \tag{19}$$

Tada prema pravilu za deriviranje determinante imamo

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{W}_i(x). \tag{20}$$

Iz jednakosti

$$(y_i^{[k]})' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^{[k]}, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{21}$$

slijedi

$$((y_0^{[1]})', (y_i^{[2]})', \ldots, (y_i^{[n]})') = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (y_j^{[1]}, y_j^{[2]}, \ldots, y_j^{[n]}), \tag{22}$$

pa zaključujemo da je redak (19) linearna kombinacija redaka matrice (16). Budući da se determinanta ne mijenja ako se nekom retku pribroji linearna kombinacija ostalih redaka, to je

$$\overline{W}_i (x) = a_{ii} (x) W (x). \tag{23}$$

Iz (20) i (23) dobivamo

$$W' (x) = S (x) W (x). \tag{24}$$

Iz (24) slijedi (17).

Normalna linearna jednadžba n-tog reda ima oblik

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} c_j (x) y^{(j-1)} + d (x), \tag{25}$$

dje su c_j i d funkcije na $[a, b]$. Obično se umjesto (25) promatra jednadžba

$$a_0 (x) y^{(n)} + a_1 (x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n (x) y = f (x), \tag{26}$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i f funkcije na $[a, b]$ i $a_0 (x) \neq 0$ za svako $x \in [a, b]$. Iz teorema 1.2 dobivamo za jednadžbu (26) ovaj rezultat.

2.3. Teorem

Ako je $a_i \in \mathscr{H}^0 (a, b)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $b \in \mathscr{H}^0 (a, b)$ i ako je

$$\min_{x \in [a, b]} |a_0 (x)| > 0, \tag{27}$$

Cauchyjev problem za jednadžbu (26) *ima jedno i samo jedno rješenje i ono ima n-tu derivaciju u svakoj točki u kojoj su funkcije a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$* i *f neprekidne.*

U daljnjem pretpostavljamo da su zadovoljeni uvjeti teorema 2.3.

Uvodeći prema § 1 funkcije

$$y_i = y^{(i-1)}, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

jednadžbu (26) svodimo na sustav

$$y_i' = y_{i+1}, \; i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{29}$$

$$y_n' = -\frac{1}{a_0 (x)} (a_n (x) y_1 + a_{n-1} (x) y_2 + \ldots + a_1 (x) y_n - f (x)). \tag{30}$$

Jednadžba (26) je *homogena* ako je $f = 0$, inače je *nehomogena*. Ako rješenje homogene jednadžbe

$$a_0 (x) y^{(n)} + a_1 (x) y^{(n-1)} + \ldots + a_0 (x) y = 0 \tag{31}$$

zadovoljava homogene početne uvjete $y (x_0) = y' (x_0) = \ldots = y^{(n-1)} (x_0) = 0$, onda je $y = 0$. Ako su

$$y^{[k]}, \ k = 1, 2, \ldots, r \tag{32}$$

rješenja jednadžbe (31), onda je i njihova *linearna kombinacija* s proizvoljnim koeficijentima $c_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, to jest funkcija

$$\sum_{k=1}^{r} c_k y^{[k]} \tag{33}$$

također rješenje jednadžbe (31). Rješenja (32) su *linearno nezavisna,* ako linearna kombinacija (33) iščezava samo u slučaju $c_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$; u protivnom rješenja (32) su *linearno zavisna.* Rješenja (32) su linearno nezavisna onda i samo onda kad su linearno nezavisna odgovarajuća rješenja homogenog sustava (29), (30). Svaki skup od n linearno nezavisnih rješenja.

$$y^{[k]}, \ k = 1, 2, \ldots, n \tag{34}$$

jednadžbe (31) je **fundamentalan sustav rješenja**. Iz korespondencije jednadžbe (25) i sustava (29), (30) slijedi *egzistencija fundamentalnog sustava.* Ako je sustav (34) fundamentalan, onda je **opće rješenje jednadžbe** (31) dano formulom

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k y^{[k]}, \tag{35}$$

gdje su c_k proizvoljne konstante; drugim riječima, za svako rješenje y jednadžbe (31) postoje brojevi c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ takvi da vrijedi (35).

Neka su (34) rješenja jednadžbe (31); promotrimo matricu

$$\begin{bmatrix} y^{[1]} & y^{[2]} & \cdot\ \cdot & y^{[n]} \\ (y^{[1]})' & (y^{[2]})' & \cdot\ \cdot & (y^{[n]})' \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ (y^{[1]})^{(n-1)} & (y^{[2]})^{(n-1)} & \cdot\ \cdot & (y^{[n]})^{(n-1)} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Determinantu matrice (36) označujemo sa W i zovemo **determinanta Wronskog** ili **Wronskijan** sustava (34). Wronskijan sustava (34) jednak je Wronskijanu skupa odgovarajućih rješenja sustava (29), (30). Iz toga slijedi ova činjenica: *Ako je* (34) *fundamentalan sustav, onda je* $W(x) \neq 0$ *za svako* $x \in [a, b]$; *ako su rješenja* (34) *linearno zavisna, onda je* $W = 0$. Iz teorema 2.2 slijedi za jednadžbu (31) ovaj rezultat.

2.3. Teorem

Neka je W Wronskijan nekoga fundamentalnog sustava rješenja jednadžbe (31) *i* $x_0 \in [a, b]$. *Tada vrijedi* **Liouvilleova formula**

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi}. \tag{37}$$